Oversigt nr. 1

I PE-kurset i skal vi bruge

[A] Sheldon Axler: "Linear algebra done right, 2nd ed., Springer.

[AB] K. G. Andersson og L.-C. Böiers: "Ordinära differentialekvationer".

Groft sagt begynder vi med at gennemgå kapitel 1–3, 5–7 i [A] i løbet af de første 10 seancer.

1. gang, tirsdag den 4. september.

- **12.30–14.00:** Vi mødtes til en oversigt over kursets langsigtede mål. Desuden tog vi hul på [A], og nåede til og med afsnittet "Properties of vector spaces" i kapitel 1.
- **14.00–16.15:** Her var programmet opgaveregning:

(1) bevis ved induktion efter n, at man ud fra differensligningen $K_{n+1} = (1+r)K_n$ (hvor r betegner rentefoden, f.eks. $r = 0,07$ ved 7% p.a.) får kapitalformlen $K_n = (1+r)^n K_0$.

Hvis man som 20-årig anbringer 10000kr. til 10% p.a, hvad er så K_{14} ? (Mange køber hus når de er 35-40.) Og K_{40} ? (mange køber sommerhus, når de er 60.)

Hvad får man, circa, ved at placere 10000kr. til 10% p.a. hvert år som 20–24 årig ? K_{14} ? K_{40} ?

(2) Ved iteration kan man bestemme f.eks. $\sqrt{2}$, eksempelvis ud fra $x_{k+1} = x_k + f'(x_k)^{-1}(f(x_k) - f(x_{k-1}))$, når $f(x) = \sqrt{x}$. Prøv at indsætte $x_0 = 1,4$ og $x_1 = 1,41$ osv.

(3) Om $\mathbb{C}$: Regn 1.1+2 i [A].

(4) Om vektorrum: Regn 1.3 i [A].

(5) Om underrum: Lav 1.5–8 i [A].

2. gang, onsdag den 5. september.

- **8.15–9.00:** Vi fik gennemgået resten af kapitel 1.
- **9.00–11.00:** Programmet var resten af opgaverne til kapitel 1 i [A].
- **11.15–12.00:** Vi fortsatte med kapitel 2 i [A], til og med Theorem 2.6.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

3. gang, mandag den 10. september.

Vi fik gennemgået kapitel 2 frem til Theorem 2.18 og halvdelen af beviset derfor.

Ved øvelserne så vi på:

(1) Lad $F(M, U)$ betegne mængden af afbildninger $f: M \to U$, hvorved M er en given vilkårlig mængde og U er et givet vektorrum over $\mathbb{L}$. Bevis da at $V = F(M, U)$ er et vektorrum over $\mathbb{L}$. (Tilfældet med $U = \mathbb{L}$ er behandlet ved forelæsningen 1. gang.)

(2) Hvad bliver $F(M, U)$ f.eks. for $M = \{1, 2, ..., n\}$ og $U = \mathbb{C}$ =den komplekse plan?

(3) Axler opgaverne 2.1, 2.3+4+5, 2.7.

Den storplettede ugle: Vi så at tilstandsvektorerne $\vec{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$ bekvemt kan anses for at ligge i $\mathbb{C}^3$ pga. komplekse egenværdier for matricen A. Her er A lig koefficientmatricen i det diskrete dynamiske system

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k, \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0.$$

Desuden så vi, at en *løsning* $\vec{x}_k$ hertil faktisk er et element i $F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$. Denne mængde er organiseret som et komplekst vektorrum; jævnfør ovenstående opgave (1).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

4. gang, tirsdag den 11. september.

- **12.30–13.15:** Vi gennemgår resten af kapitel 2 i [A]; kun de sidste to sætninger mangler. Desuden begynder vi på kapitel 3 om lineære afbildninger (også kaldet operatorer).

- **13.15–15.15:** Ved øvelserne regnes opgaver om:

  Grundbegreber: Lad $U \subset \mathbb{R}^3$ bestå af de vektorer (x, y, z), som for passende $s, t \in \mathbb{R}$ opfylder

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

  Find et *frembringersæt* for U. Bestem et lineært *uafhængigt* sæt i U. Angiv en *basis* B for U, og bestem *koordinaterne* for $u = (5, 2, 1)$ mht. denne basis.

  Suppler B til en basis B' for $\mathbb{R}^3$. Angiv koordinaterne for u mht. B'.

  Hvad er $\dim U$? Spiller dette nogen rolle f.eks. for vektoren u ?

  Udtynding: *Udtynd* sættet $((1, 1), (2, -3), (3, -2))$ til en basis for det komplekse rum $\mathbb{C}^2$. (Overvej hvorfor du/I fik et lineært uafhængigt sæt, og hvorfor det frembringer $\mathbb{C}^2$.)

  Kan sættet

  $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  udtyndes til en basis for $\mathbb{C}^3$?

  (U)endelig dimension: Regn 2.5+7+6.

  Polynomier: Regn 2.4+9+12.

  Direkte sum: Lav 2.10+13+17.

  Dimension: 2.11+14+16.

- **15.30–16.15:** Her tager vi så stor en bid som muligt af kapitel 3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

5. gang, mandag den 17. september.

- **8.15–9.00:** Vi fortætter med kapitel 3. Hovedemnet er samspillet mellem lineære afbildinger og matricer.
- **9.00–11.00:** Opgaveregningen fokuserer på:

  Nulrum: Opskriv en sætning om at nulrummet for en lineær afbilding er et underrum, og giv dit eget bevis for dette.

  Billedrum: Giv et bevis for at billedmængden for en lineær afbilding er et underrum.

  Linearitet: Opgave 3.2+3+5.

  Dimensionssætningen: 3.9+11+12.

  En udfordring: Regn 3.16. (Overvej hvorfor uligheden i opgaven er forventelig.)

  Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.
- **11.15–12.00:** Her gør vi kapitel 3 færdigt.

6. gang, tirsdag den 18. september.

- **12.30–13.15:** Vi tager hul på kapitel 5 om egenværdier og egenvektorer. Disse begreber mødte I allerede på basis, men de er (som tidligere antydet) vigtige for os her. Desuden skal I møde *invariante* underrum: Hvis $T \in \mathcal{L}(V)$, så kaldes $U \subset V$ et invariant underrum for T, hvis $T(U) \subset U$.
- **13.15–15.15:** Opgaver i flg. emner:

  Matricer: Lav 3.19.
  Find $w = T(1, 1)$, når T er som på side 49 i [A]. Bestem dernæst $\mathcal{M}(w)$ ved at bruge matrixregning. Indfør nu basen $B = ((2, 0), (1, -1))$ for $\mathbb{L}^2$ foruden den naturlige basis E for $\mathbb{L}^3$. Hvad er da $\mathcal{M}(1, 1)$ og $\mathcal{M}(T; B, E)$? Brug disse til at bestemme $\mathcal{M}(w)$.

  Linearitet+basis+koordinater+mm: Regn 3.20 og se sammenhængen !

  Dimensionssætningen: Regn 3.26+10.

  Inverterbarhed: Gennemsku 3.22. Og den overraskende 3.23. Samt 3.25, som er nem: Hvorfor ?

Injektiv: Lav 3.14 (brug opgave 3.3 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *højreinvers* er !?

Surjektiv: Lav 3.15 (brug opgave 3.8 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *venstreinvers* er !?

- **15.30–16.15:** Her fortsættes frem mod Proposition 5.18

Den storplettede ugle: I forbindelse med differensligningen (jvf. Lays bog kap. 5)

$$\vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

kan man indføre $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \ldots)$, som er element i det tidligere indførte vektorrum $V = F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$. Da udgør løsningerne et *underrum* $U \subset V$: Dvs., for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ og alle løsninger x, y fås en ny løsning $z \in V$, nemlig

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda\vec{x}_0 + \mu\vec{y}_0, \ldots, \lambda\vec{x}_k + \mu\vec{y}_k, \ldots).$$

Thi $\mathcal{A}x = (A\vec{x}_0, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots)$ definerer en lineær afbildning $\mathcal{A}\colon V \to V$; desuden rummer $\mathcal{L}(V)$ skifteoperatoren $Sx = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{k+1}, \ldots)$, jvf. side 39 i [A], så ligningen er ækvivalent med $Sx = \mathcal{A}x$ og derfor med

$$(S - \mathcal{A})x = 0 \quad \text{eller} \quad x \in \operatorname{Null}(S - \mathcal{A}). \tag{2}$$

Af disse grunde siges differensligningen at være *lineær*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

7. gang, mandag den 24. september.

- **8.15–9.00:** Vi stiler mod at gøre kapitel 5 i [A] færdigt.
- **9.00–11.00:** Opgaver i:

  Den storplettede ugle: Indse først, at der til hvert $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ findes et og kun et $x = (\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k, \dots) \in F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$ som opfylder

  $$\begin{cases} \vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \vec{x}_0 = \vec{v}. \end{cases} \tag{3}$$

  (*Vink:* Man kan vise enhver løsning nødvendigvis har formen $x = (\vec{v}, A\vec{v}, \dots, A\vec{v}, \dots)$; og omvendt at denne vektorfølge fatisk løser begyndelsesværdiproblemet ovenfor.)
  Med andre ord er $\Phi(\vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v}, \dots, A\vec{v}, \dots)$ en bijektion af $\mathbb{C}^3$ på løsningsmængden X til selve differensligningen.
  Vis at Φ er lineær og en isomorfi $\mathbb{C}^3 \to X$, samt at $\dim X = 3$ (NB ! Theorem 3.18 i [A] kan ikke bruges som den står; men brug forbemærkningen til den).

  Invariante underrum: Lav opg. 5.1 og 5.4.

  Egenværdier: Regn 5.10.

  Egenvektorer: Regn 5.5 og 5.6.

  Eventuelt gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Resten af kapitel 5 og frem til sætning 6.20 (=et berømt resultat der skyldes en *dansk* matematiker..)

8. gang, tirsdag den 25. september.

- **12.30–13.15:** Forelæsning frem mod s. 116.
- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Repetition: Find samtlige egenværdier og -vektorer for

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

  Brug Sætning 5.21 til at afgøre, om matricerne er diagonaliserbare.

Diagonalisering: Vis at A er diagonaliserbar når

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

(Find dens karakteristiske polynomium ved håndkraft, dernæst rødderne (evt. ved maskinkraft) og bestem egenværdierne for A. Konkluder så!)

Den storplettede ugle: Vis at der findes $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{C}^3$ så enhver begyndelsesvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^3$ på entydig måde kan skrives

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3.$$

Vink: A er *diagonaliserbar*. Slut så at der for enhver af differensligningens løsninger $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots)$ gælder

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= c_1 A^k \vec{u}_1 + c_2 A^k \vec{u}_2 + c_3 A^k \vec{u}_3 \\ &= c_1 \lambda_1^k \vec{u}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{u}_2 + c_3 \lambda_3^k \vec{u}_3, \end{aligned} \tag{4}$$

for komplekse skalarer $\lambda_1 \approx 0,98$, $\lambda_2 \approx -0,2 + \mathrm{i}\,0,21$ og $\lambda_3 \approx -0,2 - \mathrm{i}\,0,21$.

Brug egenskaberne ved en *norm* til at udlede at

$$\|\vec{x}_k\|_{\mathbb{C}^3} \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Hvad betyder dette for uglebestanden ?

Egenværdier og -vektorer: Regn opgave 5.8 og 5.7.

Øvre trekantsmatricer: Regn opgave 5.17.

- **15.30–16.15:** Her gør vi kapitel 6 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

9. gang, mandag den 1. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med kapitel 6 fra side 111.
- **9.00–11.00:** Opgaver i emnerne:

  Egenværdier: Regn 5.23. Evt. 5.20.

  Ortonormal: Afgør om vektorerne $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ og $(1, 0, 0)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.
  Brug Gram–Schmidt ortogonalisering til at finde en o.n.b. for $\mathbb{R}^3$.

  Gram-Schmidt: Regn 6.10+11.

  Cauchy–Schwarz: Lav 6.3.

  Indre produkter: Regn 6.6+7. Evt. 6.13.

- **11.15–12.00:** Vi gennemgår kapitel 6 til side 119.

10. gang, tirsdag den 2. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med kapitel 6 og stiler videre mod 7.7.
- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Ortogonalkomplement: Vis påstanden side 111, at $U_1^\perp \supset U_2^\perp$ gælder for to underrum $U_1 \subset U_2$ af et indre-produkt rum.
  Find $U^\perp$ når $U \subset \mathbb{R}^3$ er givet ved $U = \operatorname{span}((1, 2, 3))$. Opskriv hvad den direkte sum $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ giver for vektoren $(2, 4, -1)$.
  Regn 6.15.

  Ortogonalprojektion: Eftervis at $P_U(V) = \operatorname{Ran} P_U = U$ og at $\operatorname{Null}(P_U) = U^\perp$, jævnfør side 113.
  Brug den almene formel for P_U, jvf. 6.35 i [A], til at finde $P_U(2, 4, -1)$ i opgaven ovenfor. (Ser det bekendt ud?)

  Minimering: Regn 6.21.

  Øvre trekantsmatrix: Dyrk opgave 6.14. opskriv også matricen.

  Adjungeret afbildning: Regn 6.27.

  Yderligere træning: Lav 6.15-18.

- **15.30–16.15:** Emnet er her den *spektralsætningen* 7.9, som er en af kursets hovedsætninger. Vi skal her på afgørende måde udnytte, at operatorer har *øvre trekantsmatricer* mht. passende baser; repeter derfor 6.28 og 5.13.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

11. gang, mandag den 8. oktober.

- **8.15–9.00:** Mere om spektralsætningerne frem til side 137.
- **9.00–11.00:** Opgaver i

  Adjungerede: Regn opgave 6.30+26.

  Selvadjungerede operatorer: Lav 7.2+3+9.

  Spektralsætningen: Eftervis påstandene side 133 øverst.

  Den storplettede ugle: Matricen A for dette diskrete dynamiske system er ikke selvadjungeret (hvorfor?).
  Udsiger spektralsætningen så, at A ikke er diagonaliserbar ?

  Regn også resten af opgaverne fra sidste gang.

- **11.15–12.00:** Vi begynder her på den svenske bog [AB], og lægger ud med de centrale dele af kapitel 0.

12. gang, tirsdag den 9. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med et udvalg fra kapitel 0, nemlig om lineære differentialligninger i kapitel 0.2 og 0.3.
- **13.15–15.15:** Blandt opgaverne ser vi på:

  Matrix-diagonalisering: Givet en matrix $A_{n,n}$ og betragt matrixoperatoren $Tu = Au$, $T\colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$. Antag der findes en diagonalmatrix D og en inverterbar matrix P sådan at

  $$A = PDP^{-1}. \tag{6}$$

  Vis da at diagonalelementerne i D er egenværdier for A med P's søjler som de tilhørende egenvektorer. (*Vink:* Sæt $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ og udregn AP og PD.) Slut at P's søjler ugør en *basis* for $\mathbb{L}^n$.

  Udled det omvendte: Hvis $\mathbb{L}^n$ har en basis $(v_1, \dots, v_n)$ bestående af egenvektorer for A, da gælder (6) for en diagonalmatrix D og en inverterbar matrix P.

  Endelig: Idet A^* betegner den konjugerede af den transponerede matrix, angiv da to tilstrækkelige betingelser (for $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ hhv. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$) for at P kan vælges så søjlerne udgør et *ortonormalt* sæt i $\mathbb{L}^n$. Indse at man i så fald har at

$$P^{-1} = P^* \quad \text{dvs. } P \text{ er} \quad \begin{cases} \textit{unitær} \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{C}, \\ \textit{ortogonal} \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7}$$

Er disse betingelser på A nødvendige for at P kan vælges unitær hhv. ortogonal ?

Spektralsætningen: Regn opg. 7.11 i [A] om såkladte *kvadratrødder* af operatorer.

Separation af de variable: Regn opgave 0.1+2 i [AB].

Regn opgaver fra sidst, hvis der er tid til overs.

- **15.30–16.15:** Vi fortsætter med kapitel 1.1 i [AB] om *eksistens- og entydighedssætningen*. Vi vil dog ikke gennemgå beviset, idet dette gives på Mat 2 (det kræver avancerede teknikker I først møder til den tid).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

13. gang, mandag den 28. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi genoptager gennemgangen af kapitel 1.1 i [AB]. Det centrale bliver sætningerne 1+2, lemma 1 og begrebet maksimale løsninger.
- **9.00–11.00:** Opgaver i følgende emner:

  Lipschitzbetingelser: Regn opgave 1.1.

  Eksistens- og entydighed: Lav 1.4 og 1.10.

  Ligninger af højere orden: Regn 1.1.2.
- **11.15–12.00:** Emnet er her kapitel 1.2 om *lineære* differentialligninger. Repeter emnet fra siderne 4 og 10–12.

14. gang, tirsdag den 29. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi begynder her med kapitel 2.1 om lineære differentialligninger med *konstante* koefficienter.
- **13.15–15.15:** Regn 1.13–17.
- **15.30–16.15:** Vi stiler her mod at gøre kapitel 2.1 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Vi nåede sidste gang til side 47 med.

Det vil være en stor fordel om I til næste gang orienterer jer grundigt i afsnit 2.1, om hvad der kommer til at foregå. I har brug for at vide, at man kan vise om den sædvanlige eksponentialfunktion at den for hvert $t \in \mathbb{R}$ er fremstillet som en konvergent række:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k. \tag{8}$$

Man definerer derfor eksponentialmatricen e^A i analogi hermed,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{9}$$

Dette er hovedemnet for kapitel 2, hvor vi skal se at denne matrix har rigtig mange egenskaber til fælles med eksponentialfunktionen, og derfor fortjener at blive betegnet med e^A.

I kapitel 2 omtales også mere generelle funktioner af matricer betegnet med $f(A)$; den generalisering behøver I ikke gå i detaljer med, så I kan blot læse det, som om det blot var e^A.

15. gang, mandag den 12. november.

- **8.15–9.00:** Her afsluttes gennemgangen af kapitel 1.2; det centrale bliver begrebet fundamentalløsninger og deres rolle ifm. inhomogene ligninger, side 49 med.

- **9.00–11.00:** Her er der opgaver i:

  Maksimale løsninger: Eftervis påstanden lige undr midten side 46, om at der er en entydigt bestemt løsning defineret på hele I (en *global* løsning).

  Dimension af løsningsrum: Gennemfør den sidste del af beviset for sætning 4 side 47 og vis at afbildningen i beviset er en isomorfi.

  Lign. af højere orden: Bevis korollaret side 48.

  Giv endelig den manglende del af beviset for sætning 2 side 11. (Man kan bruge korollaret side 48 ved blot at tælle).

- **11.15–12.00:** Vi tager her hul på kapitel 2.1 om lineære systemer med konstante koefficienter. Det er her vi for alvor skal analysere til bunds for at forberede stabilitetsanalysen af ikke-lineære systemer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Vi tog i sidste uge hul på kapitel 2.1. Dette vil blive gennemgået lidt i uddrag fordi bogen på dette punkt forudsætter visse ting I først møder på Analyse 2. Men vi finder en anden vej til målet, blot må I så være indstillet på at få god lejlighed til at træne notetagningsteknik !

Vi nåede definitionen af e^A s. 89 (sæt $f(x) = e^x$ der, dvs. $a_k = 1/k!$). Og *operatornormen* samme steds. Endda det almene begreb en *norm* på et vektorrum V over $\mathbb{L}$, som er en afbildning $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ som opfylder:

$$\text{(i) } \|v\| \geq 0 \quad \text{for alle } v \in V, \text{ og kun} = 0 \text{ for } v = 0; \tag{10}$$

$$\text{(ii) } \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{L} \text{ og } v \in V; \tag{11}$$

$$\text{(iii) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{for alle } u, v \in V. \tag{12}$$

Bemærk at et normeret vektorrum V altid har en metrik induceret ved at sætte $d(u, v) = \|u - v\|$. Specielt er dette tilfældet for matricer med operatornormen, hvor $d(A, B) = \|A - B\|$. NB ! Dette svarer til konvergens af matrixelementerne jvf. side 91 øverst. Vi nåede også lemma 2 s. 90; og lemma 3 fik sit eget bevis, idet vi så at afsnitsfølgen $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ er en Cauchy-følge, og derfor konvergent.

16. gang, mandag den 19. november.

- **8.15–9.00:** Vi forsætter med eksempel 1 side 91 og når antageligt side 94 med.

- **9.00–11.00:** Opgaver om

  Operatornorm: Vis at operatornormen giver en metrik på $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{L})$. Bevis at dette metriske rum er fuldstændigt.

  Eksponentialmatricer: Regn opgave 2.1+2.
  Vis at $e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k x$ for hvert $x \in \mathbb{C}^n$.

  Fundamentalmatricer: Regn opgave 2.9.

- **11.15–12.00:** Her giver vi vores eget bevis for korollaret nederst side 100. Vi baserer os på Theorem 5.13 i [A] om øvre trekantsmatricer. REPETER denne ! Repeter også den første opgave fra 12. gang om faktoriseringen $A = PDP^{-1}$.

  Forhåbentlig når vi også lidt af kapitel 2.3.

17. gang, tirsdag den 20. november.

- **12.30–13.15:** Her fortsættes med 2.3. Vi skal her nå en hovedpointe for lineære systemer, som er flg. stabilitetsresultat: Om enhver løsning til $x'(t) = Ax(t)$ gælder at $\|x(t)\| \to 0$ for $t \to \infty$ hvis og kun hvis alle egenværdier λ til A har *negativ* realdel, dvs. $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Differentialligninger med *øvre trekantsmatrix*: Bevis at

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{n-1} & u_{n-1,1} \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

  har løsningsmængden bestående af de funktioner, der kan skrives på formen

$$y_j(t) = \sum_{k=j}^{n} p_{jk}(t) e^{\lambda_k t},$$

  hvor hvert $p_{jk}(t)$ er et polynomium med $\operatorname{grad}(p_{jk}) \le \nu_k - 1$, idet ν_k er det antal gange λ_k optræder i diagonalen (dvs. multipliciteten af λ_k som egenværdi). *Vink:* Vis først påstanden for $y_n(t)$.

  Kontinuitet af regneoperationer: Lad V være et normeret vektorrum over $\mathbb{L}$. Vis da at begge regneoperationer er kontinuerte. Dvs.

$$u_n \to u,\ v_n \to v \implies u_n + v_n \to u + v \tag{13}$$
$$\lambda_n \to \lambda,\ v_n \to v \implies \lambda_n v_n \to \lambda v \tag{14}$$

  Gælder det samme for matricer ?

  Bevis også at der om $A, A_k \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{L})$ og $v, v_k \in \mathbb{L}$ gælder

$$A_k \to A,\ v_k \to v \implies A_k v_k \to Av.$$

  Slut endelig at $e^A x = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x$ for alle $x \in \mathbb{L}^n$.

- **15.30–16.15:** Vi går her videre med kapitel 5 om den almene stabilitetsanalyse.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

18. gang, mandag den 26. november.

- **8.15–9.00:** Vi gennemgår hovedpunkterne fra kapitel 5.1–5.2 i [AB]. Dette er især ligevægtspunkter og definitionen af stabilitet side 260.
- **9.00–11.00:** Opgaverne er i emnerne:

  Homogene ligninger: Regn 2.11 og 2.13.

  Strukturen af eksponentialmatricer: Regn 2.13(!) og 2.15.

  Komplekse løsninger: Lav 2.14.
- **11.15–12.00:** Her skal vi frem til sætning 2 side 269. Vi skal som hjælpemiddel møde Liapunov-funktioner, som er et berømt trick, der groft sagt består i at finde en funktion E, der opfører sig som energien i et mekanisk system: Den bliver mindre som tiden går, og hvis systemet kommer i en ligevægtstilstand, så er det fordi energien ikke *kan* blive mindre ! (For os betyder det, at et stabilt ligevægtspunkt vil være et globalt minimumspunkt for hjælpefunktionen E.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Vi har tidligere gennemgået et udvalg fra afsnit 5.1–5.3: Autonome systemer, baner (jvf. eks. 1), ligevægtspunkter, eksempel 2 som eksempel på faseportræt og som optakt til Liapunovfunktioner, eksempel 4 som eksempel på ustabile ligevægtspunkter og grænsecyklus, stabilt og asymptotisk stabilt ligevægtspunkt; eksempler på ligevægtspunkter og faseportrætter for lineære systemer med 2×2-matricer; Liapunovfunktioner E og deres afledte langs vektorfeltet $f(x)$, dvs. $\dot{E}_f(x)$.

19. gang, mandag den 3. december.

- **12.30–16.15:** Her så vi nærmere på beviset for sætning 3 i afsnit 5.3; og vi gennemgik eksempel 7. Desuden gik vi igang med afsnit 5.4, hvor lineariseringen i (16) blev nævnt sammen med lemma 1 og dets bevis.

  Under opgaveregningen skulle I blandt andet eftervise (19), som udsiger at enhver norm på $\mathbb{R}^n$ er ækvivalent med den euklidiske. Desuden skulle I eftervise påstanden fra lemma 1s bevis om at $\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{tA}x \cdot e^{tA}y\,dt$ eksisterer uanset valget af $x, y \in \mathbb{R}^n$.

20. gang, mandag den 10. december.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter her med resten af sætning 7 og dens bevis, som er spredt ud over siderne 278–280. Bogen er lidt uklar her, så vi vil se lidt generelt på *kvadratiske former*. Dette er funktioner på $\mathbb{R}^n$ som vha. en symmetrisk matrix $Q_{n,n}$ kan skrives på formen

  $$f(x) = x^T Q x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j q_{jk} x_k.$$

  Som vi skal se kan disse, fordi Q er symmetrisk, analyseres på afgørende måde ved diagonalisering. Jævnfør spektralsætningen og opgaven om $A = PDP^{-1}$ fra 12 gang. REPETER denne !

- **9.00–11.00:** Regn opgave 5.18 og 5.21 (se figuren side 294 for et faseportræt der kvalitativt passer til ligningen (samme steds kan man også se en omskrivning til et system af første orden)).

- **11.15–12.00:** Afrunding af kurset.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Som lovet bringes her en

Pensumliste.

I "Linear algebra done right" af Sheldon Axler har vi læst kapitelerne 1–7 frem til og med side 137; dog var kapitel 4 kun kursorisk.

Fra "Ordinära differentialekvationer" har vi gennemgået

kapitel 0: Hele terminolgien og teorien, dog med undtagelse af afsnittet om Eulerligninger; eksempel 3,5,7 og 10 (samt evt. 11 afhængigt af projektemne) kan overspringes.

kapitel 1: Afsnit 1.1 undtaget beviserne for eksistens- og entydighedssætningen. Afsnit 1.2 frem til side 50.

kapitel 2: Afsnit 2.1 med to forbehold: Dels har vi kun omtalt eksponentialmatricer (og ikke $\cos A$ og de andre mere generelle konstruktioner) og dels blev siderne 95-100 (linie 14) erstattet af et udleveret notat om eksponentialmatricer indeholdende et alternativt bevis for "följdsats" side 100.

Afsnit 2.2 i sin helhed.

kapitel 5: Afsnittene 5.1-5.4 til og med side 280, dog uden bevis for "Sats 8". Desuden sprang vi over "Sats 5+6" og eksempel 5.9–5.10

Med venlig hilsen
Jon Johnsen