Oversigt nr. 1

Emnet for kurset i optimering vil her i efteråret 2007 blive *variationsregning* og *optimal kontrolteori*. Hensigten er at I skal stifte bekendtskab med disse metoder og især den type af optimeringsproblemer som de kan behandle.

Som I vil få at se, ligger problemerne langt ud over, hvad I tidligere har kunnet håndtere ved at sætte partielle afledte lig nul. Groft udtrykt skal vi beskæftige os med generelle, men dog slagkraftige, metoder til at omskrive optimeringsproblemer til nogle ordinære differentialligninger, som så kan løses. Mere derom senere.

Kurset vil basere sig på følgende bog:

[SS] Optimal control theory with economic applications, af Atle Seierstad og Knut Sydsæter; North Holland 1987.

Første gang er fredag den 7/9 klokken 8.15; vi ses i G5-110.

Vi skal blandt andet diskutere hvorledes undervisningen skal organiseres. For at tilegne sig kursets synspunkter vil det være centralt at regne de stillede opgaver. Men det foregår nok bedst, når opgaveregningen er forsinket en seance i forhold til forelæsningen (som vanligt), så mit forslag er derfor for

1. gang, fredag den 7. september. Vi mødes klokken 8.15-10.00 (i G5-109) til forelæsning. Jeg vil opsummere lidt af det optimering I kender, nævne et par historiske eksempler på *variationsregning*, og endelig gennemgå s. 13–23 i [SS] om dette emne. Hovedemnet bliver *Eulers ligninger* som en nødvendig betingelse for et ekstremum.

Fra 10–12 kan I i grupperne tage fat på opgaverne, som nedenfor stilles til næste gang.

2. gang, fredag den 14. september. Som øvelser kan I lave 1.1.1, 1.2.1+3+4+5+6 fra [SS] i grupperne.

Desuden kan I regne opgave 13.5.51 i Edwards og Penney fra basis, som en anvendelse af partielle afledte; den går ud på at minimere overfladen af en bøje under den *bibetingelse* at voluminet holdes konstant. (*Vink:* Man skal udlede to ligninger med to ubekendte, f.eks. radius og højden, og dernæst betragte voluminet som en kendt konstant, der kan optræde i løsningen.)

Af nyt stof gennemgås s. 25–31 i [SS]. Med afsæt i det vi kender fra funktioner af en variabel, skal vi se på Legendres *nødvendige* betingelse for ekstremum.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

I dag endte 2. seance med Legendres betingelse for et maksimum i variationsregningen, nemlig at $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x, \dot{x}) \leq 0$. Jvf. Thm. 1.2 og Ex. 1.4 side 26 i [SS].

Vi omtalte også, at Legendrebetingelsen udsprang af at $I''(0) \leq 0$ (mens Eulerligningen kom fra at $I'(0) = 0$). For sammenligningens skyld opskrev vi det tilsvarende resultat for funktioner af n reelle variable (med bevis for $n = 1$):

Sætning. Lad $f\colon O \to \mathbb{R}$ være C^2 på en åben mængde $O \subset \mathbb{R}^n$. Da gælder

$$f \text{ har lokalt maksimum i } x^* \in O \implies \begin{cases} \nabla f(x^*) = 0, \\ \lambda \leq 0 \text{ for enhver egenværdi } \lambda \text{ for} \\ Hf(x^*) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^*)). \end{cases} \tag{1}$$

Omvendt, hvis $\lambda < 0$ for enhver egenværdi λ for $Hf(x^*)$, hvor $x^* \in O$ er et kritisk punkt, da har f lokalt maksimum i x^*.

Bemærk at der efterlades et lille hul mellem de nødvendige og tilstrækkelige betingelser. Dette kan ikke undgås (jvf. opgaven nedenfor).

Bevis: Da f er C^2 haves Taylors formel, for en passende ε-funktion,

$$f(x)-f(x^*) = \nabla f(x^*)\cdot(x-x^*)+\tfrac{1}{2}(x-x^*)^T Hf(x^*)(x-x^*)+\varepsilon(\|x-x^*\|)\|x-x^*\|^2. \tag{2}$$

Når x^* er et lokalt ekstremumspunkt giver dette at $\nabla f(x^*) = 0$. Thi ellers kan man sætte $\|x - x^*\|$ uden for parentes på højre side og notere at

$$x \mapsto \nabla f(x^*) \cdot (\tfrac{1}{\|x-x^*\|}(x - x^*))$$

antager både positive og negative værdier på ethvert liniestykke parallelt med $\nabla f(x^*)$ gennem x^*; på et tilpas lille liniestykke gælder dette også efter addition af (to) led af formen $\varepsilon(\|x - x^*\|)$. Dette strider mod at $f(x) - f(x^*)$ har konstant fortegn på ethvert sådant liniestykke. Altså er $\nabla f(x^*) = 0$.

Matricen Hf er reel og selvadjungeret, da $f \in C^2$; så i følge spektralsætningen er $Hf(x^*)$ diagonaliserbar og har reelle egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dvs. at $Hf(x^*) = PDP^T$ for $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ og en passende valgt ortogonal $n \times n$-matrix P bestående af egenvektorer for $Hf(x^*)$. Indføres $y = P^T(x - x^*)$, hvorved $\|y\| = \|x - x^*\|$, fås derfor

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &= \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T PDP^T(x - x^*) + \varepsilon(\|x - x^*\|)\|x - x^*\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2) + \varepsilon(\|y\|)\|y\|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Tages specielt $y = (0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0)$ med tilhørende $x - x^* = Py$, så fås

$$0 \geq f(x) - f(x^*) = (\tfrac{1}{2}\lambda_j + \varepsilon(|y_j|))y_j^2 \tag{4}$$

for $\|x-x^*\| = |y_j|$ i en omegn af 0, idet x^* er et lokalt maksimumspunkt. Da $\frac{1}{2}\lambda_j + \varepsilon(|y_j|)$ har samme fortegn som λ_j for $|y_j|$ i en evt. mindre omegn af 0, så ses at $\lambda_j > 0$ er umuligt.

Omvendt ses af (3) at

$$f(x) - f(x^*) \leq (\tfrac{1}{2}\max(\lambda_1,\dots,\lambda_n) + \varepsilon(\|y\|))\|y\|^2. \tag{5}$$

Hvis alle $\lambda_j < 0$, så er parentesen på højre side negativ el. 0 for y i en tilpas lille kugle $B(0,r)$. Da er $f(x) \leq f(x^*)$ for $x \in B(x^*,r)$, som ønsket.

For en god ordens skyld kommer her den nøjagtige udgave af Taylors formel, som vi har brugt: Hvis $g\colon I \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion på et åbent interval $I \subset \mathbb{R}$, så gælder for t, $t_0 \in I$ at

$$g(t) = g(t_0)+\dots+\tfrac{g^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}+\tfrac{(t-t_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1}g^{(n)}(t_0+\theta(t-t_0))\,d\theta. \tag{6}$$

Dette kan opnås ved induktion efter n, idet man læser $(1-\theta)^{n-1}$ som $-\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(1-\theta)^n$ og udfører delvis integration.

Herfra kan man ret direkte udlede *Taylors grænseformel* for $g \in C^2(I)$:

$$g(t) = g(t_0) + \dots + \tfrac{g^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \varepsilon(t-t_0)(t-t_0)^n. \tag{7}$$

Faktisk kan ε-funktionen opnås fra (6) ved at man trækker $\frac{g^{(n)}(t_0))}{n!}(t-t_0)^n$ fra integralrestleddet; for her er $\frac{1}{n} = \int_0^1 (1-\theta)^{n-1}\,d\theta$ så man kan udnytte at $g^{(n)}$ er kontinuert i t_0 (prøv selv efter !).

For funktioner af flere variable kan begge formler f.eks. udnyttes ved at se på $g(t) = f(x^* + t(x-x^*))$, når x er i en kugleomegn $B(x^*,r)$ af x^*.

3. gang, fredag den 21. september. Her vil vi se på

Legendrebetingelsen: Lav opgave 1.3.1.

Lokalt maksimum: Godtgør at $f(x,y) = y^4 - x^2$ ikke har lokalt maksimum i origo. Forklar hvorfor sætningens betingelse, om at enhver egenværdi $\lambda \leq 0$, ikke også er tilstrækkelig for et lokalt maksimum.

Taylors grænseformel: Brug (7) til at vise at Taylorpolynomiet af grad 2 i formel (2) er korrekt. Vis dernæst at restleddet i (2) kan skrives på formen $\varepsilon(\|x - x^*\|)\|x-x^*\|^2$ som påstået [man kan bruge (6)].

Særtilfælde: Regn 1.4.1–4. Som baggrund for opgaver i kapitel 1.4 må I hjemmefra læse dette afsnit (det er ikke dybsindigt).

I forelæsningen gennemgås først sætningen ovenfor for generelle n. Dernæst forsættes med side 31–38 i [SS]. Her er hovedsigtet at introducere andre terminalbetingelser end lige $x(t_1) = x_1$. Derved bliver variationsregningen lettere at tilpasse de praktisk forekommende eksempler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Vi fik idag gennemgået variationsproblemer med andre og mere generelle *terminalbetingelser*. For sådanne fik vi udledt Eulerligningen og de såkaldte *transversalbetingelser*. Dog mangler vi endnu at føre beviset for det tilfælde at $x(t)$ skal ramme grafen for en given C^1-funktion g.

For at gøre dette korrekt (næste gang) er vi nødt til at inddrage sætningen om implicit givne funktioner: Når $\Phi(x, y)$ er en C^1 funktion $O \to \mathbb{R}^k$, for en åben mængde $O \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, og (x_0, y_0) løser ligingen

$$\Phi(x, y) = 0,$$

og endvidere Jacobimatricen for $\Phi(x_0, \cdot)$ i punktet y_0 har en invers $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1}$, så findes der lukkede kugler $U = \bar{B}(x_0, \alpha)$ og $V = \bar{B}(y_0, \beta)$ og en funktion $\psi \in C^1(U, V)$ sådan at alle ligningens løsninger (x, y) i $U \times V$ præcis er grafen for ψ. Det vil sige at

$$\{\, (x, \psi(x)) \mid x \in U \,\} = (U \times V) \bigcap \Phi^{-1}(\{0\}).$$

I bedes repetere dette fra Mat2.

4. gang, fredag den 28. september. I opgaveregningen vil vi se på 1.4.5 og 1.4.7 samt 1.5.1–4. Især 1.5.3 burde vist appellere til brede kredse…

Ved forelæsningen gennemgås side 35–45 i [SS], både med bevis for transversalbetingelsen (c) ved brug af implicit givne funktioner (se ovenfor) og, som noget nyt, om tilstrækkelige betingelser for ekstremum.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

5. gang, fredag den 5. oktober. Her ser vi på opgaverne 1.6.1–2, 1.6.4 og 1.7.4, samt gamle opgaver i resten af tiden.

Deruden gennemgås resten af kapitel 1.7 og 1.8.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Sidste gang blev variationsregningen udvidet til situationen med *vektorfunktioner* som de ubekendte, med gennemgang af eksempel 15 til illustration.

6. gang, tirsdag den 11. oktober.

Blandt opgaverne ser vi på 13.5.51 fra Edwards og Penney med de nye metoder (se nedenfor).

Dernæst 1.7.1–2, 1.8.1–2.

Desuden kan I bevise påstanden vi brugte om konkave funktioner (da vi udledte tilstrækkelige betingelser for et maksimum): *Hvis* $f : U \to \mathbb{R}$ *er konkav og differentiabel på en åben, konveks mængde* $U \subset \mathbb{R}^n$*, så gælder*

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x), \qquad \textit{for } x, y \in U.$$

Vink: For $n = 1$ reduceres påstanden til den (geometrisk oplagte) sag at f' er aftagende; dette ses at følge af at der for $y < x < z$ gælder

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

som fås af konkaviteten af f. Tilfældet $n > 1$ kan behandles ved at forbinde x og $y \in U$ med en ret linie og udnytte resultatet for $n = 1$.

Ved forelæsningen afrundes gennemgangen af kapitel 1, bl.a. om *værdifunktioner* og side 60-61 med betragtninger over *eksistens* af løsninger til variationsproblemer. Desuden tager vi en afstikker til anvendelserne i fysik.

Som et første punkt vil vi dog behandle optimering af en reel funktion under *bibetingelser*. Dels er dette ment som et supplement til det basale, som går forud for variationsregningen (som vi skal se kan den tidligere stillede opgave om bøjen f.eks. angribes ad denne vej). Dels vil det danne baggrund for kontrolteorien, som vi begynder på næste gang.

Gennemgangen vil følge nedenstående notat.

Optimering under bibetingelser. I det følgende betragtes en C^1-funktion $f : O \to \mathbb{R}$ på en åben mængde $O \subset \mathbb{R}^n$. Opgaven er så at bestemme dens ekstremværdier når x blot skal gennemløbe $\mathcal{F}$, hvor $\mathcal{F}$ er løsningsmængden til ligningerne

$$g_1(x) = c_1, \quad \dots \quad , g_k(x) = c_k. \tag{8}$$

Herved er alle $g_j \in C^1(O, \mathbb{R})$ givne funktioner. At bestemme $\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$ og $\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$ omtales som ekstremumsbestemmelse for f under de ved $g_1, \dots, g_k$ givne bibetingelser (8). Herved antages at $k < n$ (idet der ellers kun kan forventes endeligt mange, eller ingen, løsninger til (8)).

Bemærk at fordi Jacobimatricen for $\mathcal{G} := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}$ ikke er forudsat surjektiv, så er $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{-1}(\{(c_1, \dots, c_k)\})$ ikke nødvendigvis en regulær C^1-flade i O.

Som en nødvendig betingelse for ekstremum under bibetingelser har man:

Sætning. Hvis $x^* \in O$ giver f en ekstremværdi og opfylder bibetingelserne i (8), da har matricen

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^*) \tag{9}$$

ikke maksimal rang. (Dvs. der er højst k lineært uafhængige rækker.)

Bevis: Antag at $\operatorname{rang} M = k + 1$; ved omnummerering af de variable kan det antages at de $k + 1$ første søjler er lineært uafhængige. Med en hjælpevariabel $u \in \mathbb{R}$ kan man indføre

$$F(x, u) = \begin{pmatrix} f(x) + u \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}.$$

Dette er en C^1-funktion $O \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+1}$ med $\frac{\partial F}{\partial x, \partial u}(x^*, 0) = \begin{pmatrix} M & e_1 \end{pmatrix}$, skrevet som blokmatricer; herved betegner e_1 den første naturlige basisvektor.

For at anvende sætningen om implicit givne funktioner betegnes punkterne $(x, u) \in \mathbb{R}^{k+1}$ nu med (y, z), idet $y = (x_1, \dots, x_{k+1})$ og $z = (x_{k+2}, \dots, x_n, u)$. Specielt sættes $(y^*, z^*) = (x^*, 0)$, således at (y^*, z^*) tilhører løsningsmængden til

$$F(y, z) = \begin{pmatrix} f(x^*) & c_1 & \dots & c_k \end{pmatrix}^T. \tag{10}$$

Herved fastlægges en C^1-flade lokalt nær (y^*, z^*), idet $\frac{\partial F}{\partial y}(y^*, z^*)$ er regulær.

Det følger heraf at der findes en C^1-funktion ψ defineret på en åben omegn af z^* og to tilpas små lukkede kugler $B_1 = \bar{B}(y^*, \alpha)$, $B_2 = \bar{B}(z^*, \beta)$ sådan at $\psi\colon B_2 \to B_1$ og at (10) i $B_1 \times B_2$ netop løses af punkterne på ψ's graf.

Specielt løses (10) af $(\psi(z), z)$ for $z = (x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u)$ for $u \in [-\beta, \beta]$. Af første indgang i F ses da, at der for *alle* $u \in [-\beta, \beta]$ gælder

$$f(\psi(x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u), x^*_{k+2}, \dots, x^*_n) + u = f(x^*).$$

Da $u \mapsto \psi(x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u)$ er kontinuert, rummer urbilledet af enhver kugle $B(x^*, r)$ et interval $]-\gamma, \gamma[$. På dette er $u \mapsto f(x^*) - u$ aftagende, så af ligningen ovenfor ses at der i $B(x^*, r)$ findes punkter x', x'' hvor $f(x') > f(x^*)$ og $f(x'') < f(x^*)$. Fordi $(\psi(z), x^*_{k+2}, \dots, x^*_n) \in \mathcal{F}$, er $f(x^*)$ derfor ikke en ekstremværdi på $\mathcal{F}$; hvilket beviser sætningens påstand.

Bemærkning. I det specialtilfælde at M's første række er en linearkombination af de øvrige ses at der eksisterer skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sådan at $\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x^*) = 0$. Dermed er

$$\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k)(x^*) = 0 \tag{11}$$

så funktionen $f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k$ har kritisk punkt i x^*. I det tilfælde hvor $g_1, \ldots, g_k$ på forhånd vides at have lineært uafhængige gradienter, kan ekstremumspunkterne for f under bibetingelserne derfor bestemmes blandt de kritiske punkter for $f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k$.

Herved har man altså i alt $n + k$ ubekendte i samme antal ligninger, nemlig $x_1, \ldots, x_n$ og $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ som optræder i de n ligninger i (11) og i de k bibetingelser.

Denne metode til bestemmelse af ekstremumspunkter under bibetingelser omtales som benyttelse af *Lagrange'ske multiplikatorer* (som er tallene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$). I praksis er sætningen dog ofte mere bekvem, da man dels ikke behøver påvise gradienternes lineære uafhægighed, dels kan få en regneteknisk lettelse i at undersøge hvor M ikke har maksimal rang.

1. obligatoriske opgave. Denne består i at regne opgaverne 1.7.3 og 1.8.4 fra [SS]. Den ene er praktisk og den anden mere teoretisk.

Hver studerende bedes aflevere en individuel besvarelse senest fredag den 26. oktober.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

7. gang, tirsdag den 23. oktober, kl. 12.20–16.15. Som opgaver ser vi på *værdifunktioner* i 1.8.6 og 1.8.8. Og 1.8.7 angående problemer med variabel sluttid. Samt opgaven om *konkave* funktioner fra sidste gang.

Til forelæsningen tager vi fat på en mere generel problemstilling, nemlig at vælge sig en *optimal kontrol*. Vi gennemgår side 69–83.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi tog sidste gang fat på optimal kontrolteori, hvor man skal bestemme

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt$$

hvor den ubekendte er *kontrolfunktionen* $u(t)$, som dels er bundet af kravet $u(t) \in U$ for en given *lukket* mængde $U \subset \mathbb{R}^n$; dels fastlægger *tilstandsfunktionen* $x(t)$, da denne skal opfylde

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad \text{for} \quad t_0 < t < t_1$$

sammen med $x(t_0) = x^0$ og de sædvanlige terminalbetingelser for $t = t_1$.

Som et hovedresultat fik vi formuleret de nødvendige betingelser for en løsning til problemet, dvs. Pontryagins *maksimumsprincip*. Men som vi så er dette hverken enkelt at formulere eller udmønte i praksis.

Desuden er der den vanskelighed, at $u(t)$ kun er antaget stykkevist kontinuert på $[t_0, t_1]$, så højresiden af differentialligningen, dvs. $f(\cdot, u(t), t)$ er ikke en kontinuert funktion af (x, t) på $\mathbb{R}^n \times\,]t_0, t_1[$. Eksistens- og entydighedssætningen er derfor ikke til rådighed i formen kendt fra Mat1; men man har tilsvarende resultater i den mere generelle ramme, som omtalt i Appendiks A i [SS].

8. gang, fredag den 26. oktober. Først ser vi påopgaverne 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4. Desuden kan I lave resten af opgaverne fra 6. og 7. gang.

Dernæst gennemgås side 84–106 i [SS], dog ej eksempel 4. Vi skal både se at variationsregningen er et specialtilfælde af kontrolteorien, hvori Eulerligningen fås af maksimumsprincippet, og se på tilstrækkelige betingelser for en løsning.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Idag fik vi gennemgået afsnit 2.4, dog ej eksempel 4. Der var et lille hængeparti angående positivitet af løsninger til differentialligninger, men se opgaven nedenfor.

9. gang, mandag den 29. oktober kl. 12.30–16.15. Af opgaver laves først:

(1) Betragt $x'(t) = f(t, x(t))$ med $x(0) = x^0 > 0$. Antag at $f(t, y) \geq 0$ for alle t når $y > 0$. Bevis da at enhver løsning til begyndelsesværdiproblemet opfylder $x(t) > 0$ for alle $t \geq 0$. *Vink:* Antag $x(t) \leq 0$ for et vist $t > 0$; sæt $t^* = \inf\{\, t > 0 \mid x(t) \leq 0 \,\}$. Find $x(t^*)$, og udled modstrid vha. middelværdisætningen.

(2) Find et sted på side 90, hvor (1) kan bruges.

Dernæst 2.3.5, 2.3.3, 2.3.6. Desuden 2.4.1 (forbered jer ved at gennemgå eksempel 3 hjemmefra).

Til sidst gennemgås afsnit 2.5 og 2.6 frem mod side 109.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Vi fik sidste gang gennemgået de tilstrækkelige betingelser for løsning af kontrolproblemet (Mangasarians og Arrows sætninger).

Som hovedeksempel på dette vil vi i detaljer se på månelandingsproblemet, som var et historisk vigtigt eksempel. Hovedkonklusionen derfra er, at den optimale løsning er en passende *bang-bang* kontrol, som ydermere er en *feed-back* kontrol.

10. gang, fredag den 2. november. Vi begynder med opgaver: Regn 2.6.1 og 2.6.2 for at belyse de tilstrækkelige betingelser for en løsning.

Regn også 2.6.4 og 2.6.5 — hvad fortæller disse resultater om sætning 4 og 5 ?

Fortsæt med de gamle opgaver.

Endelig gennemgås månelandingsproblemet og hovedtrækkene af kapitel 2.8 om *eksistens* af løsninger til kontrolproblemer. Vi vil her møde en stor klasse af såkaldte *målelige* funktioner, som kan være ganske diskontinuerte, men mere herom på fredag (og på mat4).

11. gang, tirsdag den 13. november. NB !. Vi fortsætter her med kapitel 2.9+10.

Filippov–Cesaris eksistenssætning illustreres gennem opgave 2.8.1 og 2.8.3. Opgave 2.8.6 illustrerer også kraftigt betydningen af at have en *eksistenssætning*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Forrige gang fik vi diskuteret Filippov–Cesaris eksistensætning for kontrolproblemer. Herunder vi fik bevist indholdet af note 16 side 133 ved en simpel anvendelse af nedenstående lemma:

Grönwalls ulighed. *For to ikke-negative, stykkevis kontinuerte funktioner f og k på et interval $[t_0, T[$ (evt. for $T = \infty$) vil den første af de to følgende uligheder medføre den anden:*

$$f(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} k(s)f(s)\,ds \leq c\exp(\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds); \tag{12}$$

her er $c \geq 0$ en konstant, eller sågar en voksende funktion $c(t) \geq 0$.

Beviset føres, når f og k er kontinuerte ved at vise (12) for højre endepunkt af $[t_0, t_1]$ for et vilkårligt $t_1 > t_0$; så kan $c(t)$ erstattes af konstanten $c(t_1)$. Om $F(t) := c(t_1) + \int_{t_0}^{t} k(s)f(s)\,ds$, for $t_0 \leq t \leq t_1$, gælder at F er differentiabel med $F'(t) = k(t)f(t)$. Så er $k(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds)$ en *integrationsfaktor*, idet den givne ulighed $f(t) \leq F(t)$ medfører at

$$f(t)k(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds) - F(t)k(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds) \leq 0,$$

der ifølge differentiationsreglerne er ækvivalent med

$$\tfrac{d}{dt}(F(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds)) \leq 0.$$

Ved integration over $[t_0, t_1]$ fås at $F(t_1) \leq F(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t_1} k(s)\,ds)$, og følgelig $f(t_1) \leq F(t_1) \leq c(t_1)\exp(\int_{t_0}^{t_1} k(s)\,ds)$, som ønsket.

Hvis, mere alment, $t_1 > t_0$ er det første diskontinuitetspunkt for f eller k, så giver to anvedelser af det allerede viste, for hvert t i det næste kontinuitetsinterval $[t_1, t_2]$, at

$$\begin{aligned} f(t) &\leq c(t)\exp(\int_{t_1}^{t} k(s)\,ds) + \int_{t_0}^{t_1} k(s)f(s)\,ds \\ &\leq c(t)\exp(\int_{t_1}^{t} k(s)\,ds)\exp(\int_{t_0}^{t_1} k(s)\,ds) = c(t)\exp(\int_{t_0}^{t} k(s)\,ds). \end{aligned}$$

Thi $c(t_1) \leq c(t)\exp(\int_{t_1}^{t} k(s)\,ds)$ pga. positiviteten, så $f(t_1)$ opfylder den første ulighed og derfor også den anden. Skridtvist udstrækkes gyldigheden således forbi hvert af de isolerede diskontinuitetspunkter.

12. gang, fredag den 16. november. Vi lægger ud med opgaverne 2.8.7 og 2.8.9 samt 2.8.5.

I sidste halvdel gennemgås afsnit 1.3–4 og dele af 2. afsnit af Gerd Grubbs notesæt. Et hovedemne er begrebet *kontrollabilitet*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi gennemgik sidste gang kapitel 1.3–4 i Gerd Grubbs noter [GG], som uddyber kapitel 2.9–11 i [SS].

I kan selv læse 1.5 om positivt definitte matricer, som vi mødte ifm. Hessematricen Hf for en reel funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, der har lokalt ekstremum.

13. gang, tirsdag den 20. november. Vi ser først på opgaverne: Regn 2.9.1 om et tidsminimeringsproblem. Dernæst gamle opgaver: F.eks. 2.8.7+9+5 eller opgaven om konkave funktioner fra 6. gang.

Til sidst vil vi gennemgå kapitel 2 i noterne, eventuelt lidt af kapitel 3 om tidsminimeringsproblemet.

14. gang, fredag den 23. november. Opgaver: Fortsæt med dem der blev stillet sidste gang. (Ryd op!)

Vi gør afsnit 3 i [GG] færdigt, og fortsætter med afsnit 4.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

15. gang, tirsdag den 4. december. fik vi gennemgået beviset for Pontryagins maksimumsprincip, med visse korrektioner og simplificeringer af forklaringen i noternes afsnit 5.2. Jævnfør de udleverede håndskrevne noter.

Opgaveregningen drejede sig om opgave 3.1 og 3.2 i Gerd Grubbs noter.

16. gang, fredag den 7. december. Vi begynder med opgaveregning.

Som forberedelse til forlæsningen laves først opgaven om konkave funktioner fra 6. gang (hvis det ikke er gjort tidligere).

Vis dernæst uligheden i formel (22) i de håndskrevne noter, jeg udleverede sidst.

Vis endelig det resultat der blev brugt i noternes formel (28), dvs. at der om en maksimal løsning $x(t)$ til

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x^0,$$

hvorved $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ er defineret på en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, altid gælder at hvis den er defineret på intervallet $]a, b[$ så forlader kurvepunktet $(t, x(t))$ enhver given kompakt delmængde $K \subset \Omega$ for $t \nearrow b$ (og for $t \searrow a$). *Vink:* Antag det modsatte og brug Bolzano-Weierstrass sætning ifm. en følge $t_k \nearrow b$; udvid dernæst løsningen til en ny løsning på et større interval.

Ved forelæsningen gennemgås afsnit 3.1-2 i [SS], hvor vi skal møde andre slut- og transversalbetingelser samt skrotfunktioner.

17. gang, tirsdag den 11. december.

Vi begynder med dele af kapitel 3.5 og eksempel 10 fra afsnit 3.6 i [SS]; vi skal her møde et spilteoretisk eksempel, som er højaktuelt i dansk politik pt. !

I grupperne ser vi på opgaverne 3.1.2, 3.1.3 og 3.2.1; og gamle opgaver hvis der er tid til overs.

18. gang, fredag den 14. december. Dette bliver vores sidste seance iht. skemaet. Vi beskæftiger os her med kapitel 3.7 i [SS], som omhandler optimeringsproblemer med uendelig tidshorisont. Dette er i praksis relevant når tidshorisonten er *ukendt*; tænk for eksempel på pensionsopsparing. Imidlertid rummer dette en del såvel matematiske som erkendelsesmæssige(!) problemer, som vi skal se.

Af opgaver kan I se på 3.8.2 og 3.8.3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

2. obligatoriske opgave. Som tidligere aftalt udgøres denne af exercise 3.2 i Gerd Grubbs notesæt. (Opgaven har I afleveret, men det nævnes her for god ordens skyld.)

3. obligatoriske opgave. Som aftalt bedes I aflevere en besvarelse af opgaverne 3.2.10 og 3.6.2 i [SS] senest fredag den 21. december d.å.

I får snarest 2. obligatoriske sæt retur. Men 3. sæt må vente lidt længere.

For god ordens skyld kan kurset opregnes i en

Pensumliste. Fra "Optimal control theory with economic applications" af Seierstad og Sydsæter har vi læst kapitel 1 (dog 1.10 kursorisk) og kapitel 2 samt kapitel 3.1–2 og 3.5–8.

Dog blev kapitel 2.10 i [SS] erstattet af afsnit 1–3 i notesættet af Gerd Grubb, mens 2.11 blev erstattet af et notat af undertegnede.

Endelig blev en del standardresultater om optimering af reelle funktioner af flere variable gennemgået undervejs. Dette fremgår af de foranstående ugesedler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen