Oversigt nr. 1

Litteratur: I Matematik 3 bruger vi (igen) i efteråret 2013

E. Kreyzig: *Advanced engineering mathematics*, 10. udg., Wiley, 2011.

Beskrivelse: Kurset vil handle om matematiske beregninger indenfor emnerne:

Laplace-transformation: Snedig metode til løsning af 2. ordens differentialligninger.

Fourier-rækker: Hvordan man kan opløse funktioner i (uendeligt mange) harmoniske svingninger — og hvornår dette er smart.

Vektoranalyse: Integralsætninger for gradient, divergens og rotation.

Potensrækker: En slags Taylorpolynomier af "uendeligt høj" grad.

Analytiske funktioner: Om at udnytte *komplekse* funktioner til nemmere beregninger, inklusive integration ved residuer.

Praktisk: Vi mødes 14 gange à 4 timer. Hver seance består af 90 minutters forelæsning i Fib.16 lokale 1.108, og derefter 2 timers opgaveregning i grupperne.

Uge	Dato	Nr.	Emner
36	3/9	1	kapitel 15.1: Talfølger, konvergens. Uendelige rækker.
37	10/9	2	kapitel 6.1–2: Laplace-transformation, differentialligninger.
38	17/9	3	kapitel 6.3–5: Trinfunktionen, Diracs deltafunktion. Foldning.
39	24/9	4	kapitel 6.6–9: Mere om differentiation og differentialligninger.
40	1/10	5	kapitel 11.1–2: Fourierrækker I: periodiske funktioner.
41	8/10	6	kapitel 11.2: Fourierrækker II: lige og ulige funktioner.
43	22/10	7	kapitel 11.2–3: Fourierrækker III: tvungne svingninger.
	25/10	8	kapitel 9.1–5: Vektorfelter. Prik- og krydsprodukt. Kurvelængde.
			kapitel 9.7–9: Gradient. Divergens og rotation.
			kapitel 10.1–2: Kurveintegraler.
44	29/10	9	kapitel 10.4–6: Greens sætning i planen. Fladeintegraler.
	1/11	10	kapitel 10.7: Gauss's sætning (divergenssætningen).
45	5/11	11	kapitel 10.8–9: Potentialer. Stokes's sætning (rotationssætningen).
46	12/11	12	kapitel 13: Kompleks differentiation,
			Cauchy–Riemanns differentialligninger for analyticitet.
			kapitel 17.1: Konform afbildning.
			kapitel 14.1–2: Komplekse kurveintegraler.
47	19/11	13	kapitel 14.3: Cauchys integralformler for analytiske funktioner.
			kapitel 15: Potens- og Taylorrækker.
48	26/11	14	kapitel 16: Laurentrækker. Integration ved residuer.
	27/11	15	Øvelser til 14. gang i grupperummene, kl. 10–12.

Justeringer kan forekomme undervejs.

Eksamen: Intern skriftlig prøve med hjælpemidler.

Pensum: Den gennemgåede litteratur i de 14 seancer, der er skemasat.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Tirsdag den 3. september, kl. 12.30–16.15. Vi mødes i Fib. 16, auditorium 1.108 til forelæsning kl. 12.30.

Til opgaveregningen (ca. 14.15) repeterer vi først lidt om komplekse tal (det er IKKE meningen man skal bruge regnemaskine):

- Skriv brøkerne
$$\frac{6 - \mathrm{i}\,4}{1 + \mathrm{i}}, \qquad \frac{7 + \mathrm{i}\,14}{-\sqrt{5} + \mathrm{i}\,3}$$
på formen $x + \mathrm{i}\,y$ for passende reelle tal x, y.
- Find z^2 og $|z|^2$ når $z = 3 - \mathrm{i}\,4$. (Overraskende!?)
- Find modulus og (et) argument for $z = 2 - \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$.
Skriv z på formen $re^{\mathrm{i}\,\theta}$.
- Find real- og imaginærdelen for $4e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$. *Vink:* Løs $z^2 = 16e^{\mathrm{i}\,\pi/6}$.
(Svar: $\sqrt{6} \pm \sqrt{2}$)!)

Desuden tager vi et par små opgaver om **uendelige rækker**:

- Bestem summen af den uendelige række
$$1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^n + \ldots$$
Brug først din intuition !
Brug dernæst en relevant formel og sammenlign !
- Udregn $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$.
(*Vink:* Omskriv til en kvotientrække—hvilken kvotient q kan bruges?)
- Brug kvotientkriteriet til at afgøre om følgende rækker konvergerer:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}.$$

Tid til overs ? Begynd på opgave 15.1.16+17 i bogen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

NB ! Som et supplement til Kreyzigs sætninger bør jeg nævne følgende velkendte resultater:

Potenskriteriet: En uendelig række af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{konvergerer hvis og kun hvis} \quad 1 < p < \infty.$$

Alternerende rækker Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \qquad \begin{array}{l}\text{konvergerer når } b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots > 0 \\ \text{og desuden } b_n \to 0 \text{ for } n \to \infty.\end{array}$$

(Endda: Når $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ og afsnitsfølgen betegnes (s_n), så gælder $0 < (-1)^n (s - s_n) < b_{n+1}$. Dvs. at fejlen $s - s_n$ både har samme fortegn og højst samme størrelse som det først udeladte led!)

Begge disse resultater kan være nyttige, både direkte og når man vil bruge sammenligningskriteriet.

Tirsdag d. 10. september. Her skal vi træne at afgøre uendelige rækkers konvergens/divergens:

Sammenligningskriteriet (Thm. 15.1.5) Vis at rækken nedenfor konvergerer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 4} + \cdots.$$

Konvergens/divergens Regn 15.1.16–25. Husk at angive *hvilket* kriterium du brugte til at finde svarene.

Videnskabelige beregninger Dette kan belyses ved at regne 15.1.30. (*Vink:* Man kan f.eks. begynde med at opnå konvergens af rækken, ved at vise at den opfylder kvotientkriteriet med $q = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) < 1$.)

Grænseværdi: Lav f.eks. opgave 15.1.12.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

NB. Regn så vidt muligt opgaverne nedenfor HJEMMEFRA ! (Mange er helt enkle at gå til...)

3. gang, tirsdag den 17. september. Emnerne for opgaverne er:

Laplacetransformering: Regn 6.1.1+3+5+7 (nemme!), brug tabellen og IKKE computer! Dernæst 6.1.9+11 ved brug af definitionen på Laplacetransformationen.

Forsæt eventuelt med 6.1.20+21.

Invers transformering: Lav 6.1.31+32 og 6.1.37+39+41.

Differentialligninger: Regn 6.2.3+5+7.

Gamma-funktionen: Læs om $\Gamma(x)$ side A54 og regn efter at definitionen i (24) giver formlerne i (25)–(26) som påstået. (Nemme!)

Dernæst opgave 6.1.22.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

4. gang, tirsdag den 24. september. Her fortsætter vi med forelæsning over afsnittene 6.5–6.7 i [K].

Opgaveregningen fokuserer på:

Differentialligninger: Opgave 6.2.11.

Forskudte problemer: Prøv med 6.2.15. (Jvf. Ex. 6.2.6.)

Trinfunktionen: Regn 6.3.3+4+5 — tegn f's graf, skriv f vha. $u(t-a)$, bestem $\mathcal{L}(f)$!

Translationssætningen (Thm. 6.3.1): Regn 6.3.15+12, og dernæst 6.3.14+13.

Diskontinuerte højresider: Lav opgave 6.3.22.

Vink: Udnyt omskrivningen $4tu(t-1) = 4(t-1)u(t-1) + 4u(t-1)$ til at repræsentere højresiden $h(t)$ som

$$h(t) = 4(t-1)u(t-1) + 12u(t-1).$$

Fortsæt med opgave 6.3.23.

NB: Regn så vidt muligt 1–2 fra hvert emne hjemmefra !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Vi fortsætter her i kursets 2. fjerdedel med at gennemgå kapitel 11.1–4 om Fourierrækker.

5. gang, tirsdag den 1. oktober. Her ser vi på opgaver i

Foldning: Lav opgave 6.5.3+7 (nemme!).

Fortsæt med 6.5.11 og 6.5.21+23+25.

Stambrøker: Regn 6.5.26.

Koblede ligninger: Lav 6.7.19 (man kan gå frem som i Ex. 6.7.2). Fortsæt med 6.7.20.

6. gang, tirsdag den 8. oktober. Vi regner opgaver i

Periodiske funktioner: Lav 11.1.7+10 (nemme! — husk også at tegne (lidt) både for $x < -\pi$ og for $x > \pi$). Prøv 11.1.3.

Fourierrækker: Brug din PC til at plotte $S_{10}(x), S_{20}(x)$ og $S_{30}(x)$ i eksemplet side 478 over intervallet $-4 \leq x \leq 4$. Sammenlign med Figur 261 ! (Den dårlige tilnærmelse i diskontinuitetspunkterne kaldes *Gibbs fænomen*. Se eventuelt nærmere på

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon`.)

Fourier-koefficienter: Regn først 11.1.21. Dernæst 11.1.16; er resultatet overraskende?

Fortsæt med 11.1.17+13.

(U)lige funktioner: Lav 11.2.1 og også 11.2.3+4 (nemme!).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Sidste gang så vi at en 2π-periodisk funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vha. den komplekse eksponential funktion $e^{\mathrm{i}\,nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ har den *komplekse* Fourierrække

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nx} \quad \text{hvor } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}\,nx}\,dx. \tag{1}$$

Endvidere så vi, at funktionerne $e^{\mathrm{i}\,nx}$ og $e^{\mathrm{i}\,mx}$ er ortogonale for $n \neq m$—og at fremstillingen af $f(x)$ ovenfor derfor kun opnås, såfremt man vælger alle c_n til at have værdierne givet ved integralformlen i (1).

Heraf udledte vi "Fourierrækkernes ABC": Ved overgang mellem de reelle og komplekse Fourierrækker gælder der at $c_0 = a_0$ mens

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

Omvendt har man at $c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}\,b_n)$ og $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}\,b_n)$.

7. gang, tirsdag den 22. oktober. Vi fortsætter med gennemgangen af Fourierrækker iht. oversigt nr. 1. Dog vil vi først lægge hovedvægten på afsnit 11.2–3.

Desuden ser vi denne gang på følgende opgaver:

Komplekse Fourierrækker: Brug ovenstående resume til at bestemme de *komplekse Fourierrækker* for følgende funktioner:

$$f(x) = 7, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sin x. \quad \text{(Nemme!)}$$

Find den komplekse Fourierrække for "firkantspændingen" i Eksempel 11.1.1.

Reelle funktioner: Vis at når $f(x)$ kun har reelle værdier, så gælder at $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Fourierrækker, (u)lige fkt.: Regn opgave 11.2.11. Brug resultatet til at slutte at der (som lovet; jvf. også opgave 11.2.20) gælder at

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

—Hvorfor er Fourierrækken konvergent for $x = 1$?

Nye rækker vha. gamle: Vær snedig og regn 11.2.12 ved bruge metoden fra Eksempel 11.2.2 på resultatet i 11.2.11.

(Overvej også om Theorem 11.2.1 kan udnyttes!)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

8. gang, NB: fredag den 25. oktober kl. 8.15-12.00. Ved forelæsningen vil jeg først runde af omkring Fourierrækker, og dernæst gå videre med kapitel 9 om vektoranalyse iht. oversigt nr. 1.

Øvelserne vil blive sidste runde med Fourierrækker:

Halv-periode udviklinger: Regn 11.2.23. (OBS. (a) er nem!)

Forsæt med 11.2.25. (NB: Del (a) har vi mødt før. Hvor?)

Periodiske partikulærløsninger: Lav først 11.3.14 — *OBS:* Fourierrækken for $r(t)$ er kendt fra Eksempel 11.1.1. (Man får $A_n = -\frac{4c}{\pi D_n}$, $B_n = \frac{4(1-n^2)}{\pi n D_n}$.)

Regn dernæst 11.3.15.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Som sagt ved forelæsningen: I bør bladre kapitel 9 igennem og nikke til det I kender undervejs—og læse nærmere om de ting, I ikke genkender !

I de nye emner kan I med fordel gennemregne Kreysigs taleksempler, blot for at afmystificere tingene.

9. gang, tirsdag den 29. oktober. Her regnes opgaver i følgende emner:

Gradienter+potentialer: Gennemsku opgave 9.7.43–44.

Rotation af vektorfelt: Regn 9.9.5+6. (*Vink:* Overvej om du kan bruge en af formlerne i 9.9.14, og bevis den formel du bruger.)

Bevis formlerne i Theorem 9.9.2 (regn løs!).

Gl. eksamensopgave(januar 2011) Betragt ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t),$$

hvor den ydre kraft $r(t)$ er den 2π-periodiske funktion der er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & \text{for } -\pi < t < 0, \\ -t^2/\pi + \pi/2, & \text{for } 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Vis at $r(t)$ hverken er lige eller ulige.

Find en 2π-periodisk partikulærløsning til ligningen.

Eventuelt gamle opgaver i Fourierrækker, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

10. gang, fredag den 1. november kl. 8.15-12.00.
Her regnes opgaver i de nye temaer:

Kurveintegraler: Regn 10.1.2 ved brug af definitionen side 414.

Fortsæt med 10.1.3 og 10.1.7.

Stiuafhængighed: Gør følgende i opgave 10.2.3:

- opskriv vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z)$;
- begrund at integralet er uafhængigt af integrationsstien;
- bestem værdien af kurveintegralet.

Lav så 10.2.5 på samme måde.

Greens sætning: Kontroller at Green sætning er korrekt i tilfældet hvor $\vec{F} = (y, -x)$ og kurven $\mathcal{C}$ er cirklen $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (Udregn begge integraler.)

Kurver: se næste opgave!

Hyperbolsk sinus og cosinus: Eftervis at $\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ og $\sinh t := \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ er hinandens afledede:

$$(\cosh t)' = \sinh t, \qquad (\sinh t)' = \cosh t.$$

Begrund at $\sinh' t > 0$, og at vi derfor har en invers funktion $\sinh^{-1} t$.

Vis at når man betragter punkterne $(x, y) = (\pm a \cosh t, b \sinh t)$ for et vilkårligt reelt tal t, så ligger (x, y) på hyperblen H med ligningen

$$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

Omvendt: Givet et punkt (x_0, y_0) på denne hyperbel, så findes et $t_0 \in \mathbb{R}$ sådan at $(x_0, y_0) = (\pm a \cosh t_0, b \sinh t_0)$. Thi sættes $t_0 = \sinh^{-1}(y_0/b)$, så har man dels at $y_0 = b \sinh t_0$, dels at

$$(\frac{x_0}{a})^2 = 1 + (\frac{y_0}{b})^2 = 1 + \frac{(e^{t_0} - e^{-t_0})^2}{4} = \cosh^2 t_0,$$

sådan at $x_0 = \pm a \cosh t_0$—Kontroller dette!

Da hyperblen H således er parametriseret ved $(\cosh t, \sinh t)$ (analogt til enhedscirklen), så kaldes disse funktioner *hyperbolsk cosinus*, hhv. *hyperbolsk sinus*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

11. gang, tirsdag den 5. november. Ved dagens forelæsning vil hovedvægten blive lagt på afsnittene 10.7 og 10.8.

Opgaveregningen vedrører

Greens sætning: Øv dig på formlen ved at regne 10.4.3+5+7+9.

Stiuafhængighed: Lav først 10.2.11. (Søg eventuelt inspiration i konklusionerne fra Example 10.2.4.)

Fortsæt med 10.2.13+15+17+19.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

12. gang, tirsdag den 12. november. Ved dagens forelæsning behandler vi først 10.9 om Stokes's rotationssætning (en rumlig udgave af Greens sætning: repeter denne!).

Dernæst tager vi hul på kursets sidste emne: komplekse funktioner. Repeter afsnit 13.1–2 om komplekse tal.

Ved opgaveregningen er temaet:

Divergenssætningen: Regn 10.7.9+10. Fortsæt med 10.7.13+17. Og rund af med 10.7.15+16.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Vi skal snart benytte rod- og kvotientkriteriet for uendelige rækker. I bedes repetere disse fra kapitel 15.1.

13. gang, tirsdag den 19. november.
Vi fortsætter gennemgangen fra afsnit 13.4.
Ved øvelserne ser vi på følgende opgaver. De fleste er helt enkle, så efter (manglende!) behov kan nogle eventuelt overspringes.

Rotationssætningen: Få styr på denne ved at regne 10.9.13+15+17.

Komplekse tal og funktioner: For hvilke komplekse tal z er funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z-3)} \quad \text{defineret ?}$$

Skitser definitionsmængden for $f(z)$. Dernæst opgave 13.3.1–5 (nemme).

Real- og imaginærdele: Regn 13.3.10–12 (nemme).

Kompleks differentiation: Regn 13.3.18–20 (nemme).

Analytiske funktioner: Begrund at ethvert polynomium på formen

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

er analytisk (dvs. differentiabel i ethvert $z \in \mathbb{C}$).

Er $p(z)$ en *hel* funktion ?

Cauchy–Riemanns ligninger: Regn 13.4.2–5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Sidste gang fik vi gennemgået nyt om en række komplekse funktioner i kapitel 13.5+6. Læs/repeter dette og test dig selv *hjemme* med

Repetitionsopgaver til kap. 13.5+6: Regn opgave 13.5.1+2+15 om eksponentialfunktionen e^z (nemme!).

Fortsæt med 13.6.6+7+3+4+13 om trigonometriske funktioner $(\cos z, \sin z)$ og hyperbolske funktioner $(\cosh z, \sinh z)$.

Desuden gennemgik vi resten af kapitel 13.4 om Cauchy-Riemanns differentialligninger og kapitel 17.1 om konforme afbildninger.

14. gang, tirsdag den 26. november. Her gives først en oversigt over kapitel 14 om komplekse kurveintegraler (fokus bliver lagt på forskellene fra det almindelige kurveintegral i kapitel 10.1+2).

Dernæst lægges kræfterne i

- *Potensrækker:* hvor vi ser på kapitel 15.2–4;
- *Residueregning:* hvor vi ser på hovedtrækkene af kapitel 16.

  Bemærk oversigten side 734.

Endelig regnes opgaver i emnerne:

Cauchy-Riemanns ligninger: Lav 13.4.11.

Harmoniske funktioner/Laplaceligningen: Regn 13.4.13+15.

Konforme afbildninger: Regn 17.1.17.

Kurveintegraler: Lav opgave 14.1.21+23+25.

Cauchys integralsætning: Gennemsku 14.2.2 (nem!).

Deformation af kurver: Udfør diskussionen i opgave 14.2.3+4. (Nemme)

Cauchys integralformel: Gennemsku 14.3.13+19 (nemme!).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

OPGAVER til 14. gang, onsdag den 27. november kl. 10-12 i GRUPPERUMMENE.

Konvergensradius: Bestem Taylorrækken for $g(z) = \frac{1}{1-z^2}$ i $z_0 = 0$ (nem!) og vis at dens konvergensradius er $R = 1$.

Regn også 15.2.10+9+7.

Taylorrækker: Find Taylorrækken for $f(z) = e^z + \frac{1}{1-z}$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$.

Lav så 15.4.3 (nem) og 15.4.4.

Laurentrækker: Regn 16.1.5 og 16.1.6 samt 16.1.7. *Vink:* Brug Taylorrækkerne for de kendte funktioner.

Residuer: Lav 16.3.1.

Residueintegration: Regn først 16.3.7; eventuelt også 16.3.8.

Dernæst udregnes integralerne over $\mathbb{R}$ i opgave 16.4.5+6.

NB ! I kan stille spørgsmål til pensum **fredag den 3. januar 2014**. Vi mødes i Fib. 15, auditorium A, **kl.10–12.**

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 16

Som lovet efter sidste forelæsning kommer der til jeres inspiration et

Eksamenslignende opgavesæt.

Opgave 1. Løs ved brug af Laplacetransformationen systemet af ligninger

$$y_1'(t) = 2y_2(t) + 1$$
$$y_2'(t) = -y_1(t) + t$$

under begyndelsesbetingelserne $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 2$.

Opgave 2. Betragt vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ og fladen S givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{r}(\rho, \phi) = (2 + \rho\cos\phi, 3, 1 + \rho\sin\phi),$$

hvor $0 \leq \rho \leq 1$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

(1) Begrund at S er en cirkelskive parallel med xz-planen, og find dens radius og centrum.

(2) Udregn $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$ og $\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F}$.

(3) Bestem fladeintegralet $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$, hvor $\vec{n}$ betegner enhedsnormalvektoren til S, valgt så $\vec{n}\cdot\vec{j} > 0$.

Opgave 3 Betragt ligningen $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t)$, hvor den ydre kraft $r(t)$ er en 2π-periodisk funktion givet ved

$$r(t) = \begin{cases} -\sin t, & \text{for } -\pi < t < 0 \\ \sin t, & \text{for } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Godtgør at $r(t)$ er en lige funktion.

Find en 2π-periodisk partikulærløsning $y(t)$.

Opgave 4. Lad $f(z)$ betegne funktionen givet ved $f(z) = \frac{1}{9-z^2}$.

(1) Begrund at den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^{2n}$ er konvergent for alle komplekse tal $z \in \mathbb{C}$ for hvilke $|z| < 3$.

(2) Bestem potensrækken for $f(z)$ med $z_0 = 0$ som udviklingspunkt, og angiv dens konvergensradius.

(3) Find værdien af kurveintegralerne $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$ og $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-i}\,dz$, hvorved $\mathcal{C}$ betegner cirklen med centrum i 0 og radius $\sqrt{2}$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen