MATEMATIK 3
EN,MP 28. august 2014

Oversigt nr. 1

Litteratur: I Matematik 3 bruger vi (igen) i efteråret 2014

[K] E. Kreyzig: *Advanced engineering mathematics*, 10. udg., Wiley, 2011.

Beskrivelse: Kurset vil handle om matematiske beregninger indenfor emnerne:

Laplace-transformation: Snedig metode ifm. differentialligninger.

Fourier-rækker: Hvordan man kan opløse funktioner i (uendeligt mange) harmoniske svingninger — og hvornår dette er smart.

Vektoranalyse: Integralsætninger for gradient, divergens og rotation.

Potensrækker: En slags Taylorpolynomier af "uendeligt høj" grad.

Analytiske funktioner: Om at udnytte *komplekse* funktioner til nemmere beregninger, inklusive integration ved residuer.

Praktisk: Vi mødes 15 gange à 4 timer. Hver seance består af 2 timers opgaveregning i grupperummene og 90 minutters forelæsning.

Forelæsningerne holdes i *forskellige* auditorier, og de ligger nogle gange før og andre gange efter øvelserne. (Se moodle.)

Uge	Dato	Nr.	Emner
36	3/9	1	kapitel 6.1–2: Laplace-transformation, differentialligninger.
37	8/9	2	kapitel 6.3–5: Trinfunktionen, Diracs deltafunktion. Foldning.
	10/9	3	kapitel 6.6–9: Mere om differentiation og differentialligninger.
38	15/9	4	kapitel 15.1: Talfølger, konvergens. Uendelige rækker.
	17/9	5	kapitel 11.1–2: Fourierrækker I: periodiske funktioner.
39	22/9	6	kapitel 11.2: Fourierrækker II: lige og ulige funktioner.
40	29/9	7	kapitel 11.2–3: Fourierrækker III: tvungne svingninger.
	1/10	8	kapitel 9.1–5: Vektorfelter. Prik- og krydsprodukt. Kurvelængde.
			kapitel 9.7–9: Gradient. Divergens og rotation.
			kapitel 10.1–2: Kurveintegraler.
41	6/10	9	kapitel 10.4–6: Greens sætning i planen. Fladeintegraler.
43	20/10	10	kapitel 10.7: Gauss's sætning (divergenssætningen).
	22/10	11	kapitel 10.8–9: Potentialer. Stokes's sætning (rotationssætningen).
44	27/10	12	kapitel 13: Kompleks differentiation,
			Cauchy–Riemanns differentialligninger for analyticitet.
			kapitel 17.1: Konform afbildning.
			kapitel 14.1–2: Komplekse kurveintegraler.
45	3/11	13	kapitel 14.3: Cauchys integralformler for analytiske funktioner.
			kapitel 15: Potens- og Taylorrækker.
	5/11	14	kapitel 16: Laurentrækker. Integration ved residuer.
46	10/11	15	kapitel 16: Mere om Laurentrækker og residueregning.

Justeringer kan forekomme undervejs.

Pensum: Den gennemgåede litteratur i de 15 seancer, der er skemasat.

Eksamen: Intern skriftlig prøve med alle hjælpemidler—dog ingen elektroniske !

1. gang, onsdag den 3. september. En god ide kunne være (som generel forberedelse til 1.–3. seance), at repetere fra 2. semester, hvordan man løser differentialligninger af første og anden orden af formen:

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t), \tag{1}$$
$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t). \tag{2}$$

Det kan eksempelvis gøres ved at læse i afnsit 2.4 i [K], inklusive eksempel 2.4.2.

Kl. 10.15–12.00. Forelæsning over kapitel 6.1–6.2 i [K].

Hjemmeforberedelse: Læs de første 2 sider i kapitel 6.1 om Laplacetransformering af funktioner.

Studer eksempel 6.1.1 i detaljer—og prøv at bruge metoden fra eksemplet til at finde den Laplacetransformerede af førstegradspolynomiet t. (Brug partiel integration.)

Bladr videre i kapitel 6.1–6.2 og orienter dig, om hvilke emner der behandles.

Kl. 12.30–14.30. Her mødes vi til øvelser i de lettest tilgængelige dele af det, der blev gennemgået ved forelæsningen. Dvs.:

Laplacetransformering: Regn 6.1.1+3+5+7 (nemme!), brug tabellen og IKKE computer!

Dernæst 6.1.9+11 ved brug af definitionen på Laplacetransformationen.

Rund af med at lave 6.1.20+21.

Invers transformering: Lav 6.1.31+32.

NB! Når jeg skriver "nemme!" er det fordi, at opgaverne ikke behøver lange udregninger—hvis de gribes rigtigt an.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

2. gang, mandag den 8. september.

Kl.12.30–14.15. Ved øvelserne bliver programmet følgende opgaver:

Invers transformering: Lav 6.1.25 og så 6.1.37+39+41.

Snedighed: Lav 6.2.17+19 ved at bestemme $\mathcal{L}(f')$ på 2 måder: brug linearitet og reglen for de afledte.

Differentialligninger: Regn 6.2.3+5+7.

Gamma-funktionen: Læs og lær om $\Gamma(x)$ side A54 og regn efter at definitionen i (24) giver formlerne i (25)–(26) som påstået. (Nemme!)

Potensfunktioner: Regn opgave 6.1.22.

Kl. 14.30–16.15. Forelæsning over kapitel 6.3–6.5 i [K].

Hjemmeforberedelse: Læs de første to sider i 6.3 om Heavisides trinfunktion $u(t-a)$.

Studer udledelsen af formel (2) for den Laplacetransformerede $\mathcal{L}(u(t-a))$ i detaljer—og find en væsentlig trykfejl !

Bladr videre i 6.3 og orienter dig om emnerne. Ligeså i 6.5, hvor vi som noget vigtigt nyt skal møde **foldning** af funktioner. (eng.: convolution)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

3. gang, onsdag den 10. september.
Her fortsætter vi med forelæsning kl. 8.15-10.00 over afsnittene 6.6–6.9 i [K]. Hjemmeforberedelsen: Læs afsnit 6.6 og løs opgave 6.6.2 ved at bruge en af de nye formler. (Hvilken?)

Opgaveregningen kl. 10–12 fokuserer på:

Differentialligninger: Opgave 6.2.11.

Forskudte problemer: Prøv med 6.2.15. (Jvf. Ex. 6.2.6.)

Trinfunktionen: Regn 6.3.3+4+5 — tegn f's graf, skriv f vha. $u(t-a)$, bestem $\mathcal{L}(f)$!

Translationssætningen (Thm. 6.3.1): Regn 6.3.15+12, og dernæst 6.3.14+13.

Diskontinuerte højresider: Lav opgave 6.3.22.

Vink: Udnyt omskrivningen $4tu(t-1) = 4(t-1)u(t-1) + 4u(t-1)$ til at repræsentere højresiden $h(t)$ som

$$h(t) = 4t - 4(t-1)u(t-1) + 4u(t-1).$$

Fortsæt med opgave 6.3.23.

NB: Regn så vidt muligt 1–2 fra hvert emne hjemmefra !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

4. gang, mandag den 15. september. Ved øvelserne ser vi på emnerne

Foldning: Lav opgave 6.5.3+7 (nemme!).

Dernæst 6.5.21+23+25, bemærk overskriften !

Stambrøker: Regn (lidt af) 6.5.26 for sammenligningens skyld.

Integralligninger: Opgave 6.5.11.

Koblede ligninger: Lav 6.7.19 (man kan gå frem som i Ex. 6.7.2). Fortsæt med 6.7.20.

Forelæsningen fokuserer på kapitel 15.1, som forberedelse til kapitel 11.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

5. gang, onsdag den 17. september, kl. 8.15-12.00. Hjemmefra bedes I repetere lidt om komplekse tal (UDEN at bruge regnemaskine):

- Skriv brøkerne
$$\frac{6-\mathrm{i}\,4}{1+\mathrm{i}}, \qquad \frac{7+\mathrm{i}\,14}{-\sqrt{5}+\mathrm{i}\,3}$$
på formen $x + \mathrm{i}\,y$ for passende reelle tal x, y.
- Find z^2 og $|z|^2$ når $z = 3 - \mathrm{i}\,4$. (Overraskende!?)
- Find modulus og (et) argument for $z = 2 - \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$.
Skriv z på formen $re^{\mathrm{i}\,\theta}$.
- Find real- og imaginærdelen for $4e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$. *Vink:* Løs $z^2 = 16e^{\mathrm{i}\,\pi/6}$.
(Svar: $\sqrt{6} \pm \sqrt{2})!$)

Opgaveregningen kl. 8-10 drejer sig om **uendelige rækker**:

Kvotientrækker: Brug din *intuition* til at finde summen af den uendelige række
$$1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^n + \ldots$$
Anvend dernæst en relevant formel og sammenlign !
Udregn $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$. *Vink:* Hvilken kvotient q kan bruges?
Brug kvotientkriteriet til at afgøre om følgende rækker konvergerer:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}.$$

Sammenligningskriteriet (Thm. 15.1.5) Vis at rækken nedenfor konvergerer:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+4} + \ldots.$$

Konvergens/divergens Regn 15.1.16–25. Husk at angive *hvilket* kriterium du brugte til at finde svarene.

Videnskabelige beregninger Dette kan belyses ved at regne 15.1.30. (*Vink:* Man kan f.eks. begynde med at opnå konvergens af rækken, ved at vise at den opfylder kvotientkriteriet med $q = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) < 1$.)

Grænseværdi: Lav f.eks. opgave 15.1.12.

NB ! Som et supplement til Kreyzigs sætninger bør jeg nævne følgende velkendte resultater:

Potenskriteriet: En uendelig række af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{konvergerer hvis og kun hvis} \quad 1 < p < \infty.$$

Alternerende rækker: Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \qquad \text{konvergerer når } b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots > 0$$
$$\text{og desuden } b_n \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

(Endda: Når $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ og afsnitsfølgen betegnes (s_n), så gælder $0 < (-1)^n (s - s_n) < b_{n+1}$. Dvs. at fejlen $s - s_n$ både har samme fortegn og højst samme størrelse som det først udeladte led!)

Begge disse resultater kan være nyttige, både når man vil bruge sammenligningskriteriet og mere direkte (som i opgave 15.1.17, hvor real- og imaginærdelene begge konvergerer).

I opgave 5.1.24 kan man vise at $|z_{n+1}/z_n|$ går mod $3e^{-\ln'(1)} = \frac{3}{e} > 1$, så rækken divergerer. Faktisk går det almindelige led endda ikke mod nul—dette kan vises vha. Stirlings formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n,$$

som I kan finde på wikipedia. (På engelsk er denne database meget pålidelig: anbefales !)

Ved forelæsningen kl. 10.15-12.00 tager vi fat på kapitel 11.1–11.3 om Fourierrækker. Vi når antageligt 11.1 og lidt af 11.2.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

NB. Se dagens tilføjelse på side 7.

Som nævnt idag kan det anbefales at anskaffe sig *Mathematical Handbook of formulas and tables* af Murray Spiegel (Schaum's outline series, Mcgraw-Hill), hvor der f.eks. er mange konkrete Fourier-rækker mmm.

Hjemmeforberedelse: Læs i kapitel 11.2 om lige funktioner og ulige funktioner og regn opgaverne nedenfor under overskriften "(U)lige funktioner".

Fortsæt med at regne de øvrige opgaver, så vidt muligt, så I kan udnytte hjælpelæreren med det samme fra kl. 12.30.

6. gang, mandag den 22. september. Vi regner opgaver kl. 12.30–14.15 i emnerne

Periodiske funktioner: Lav 11.1.7+10 (nemme!) — husk også at tegne (lidt) både for $x < -\pi$ og for $x > \pi$.

Prøv 11.1.3.

Fourierrækker: Brug din PC til at plotte $S_{10}(x), S_{20}(x)$ og $S_{30}(x)$ i eksemplet side 478 over intervallet $-4 \leq x \leq 4$. Sammenlign med Figur 261 !

Den dårlige tilnærmelse i diskontinuitetspunkterne kaldes *Gibbs fænomen*. Se eventuelt nærmere på

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon`.

Fourier-koefficienter: Regn først 11.1.21. Dernæst 11.1.16. Skitser graferne for $-3\pi \leq x \leq 3\pi$—er resultaterne for Fourier-rækkerne overraskende?

Fortsæt med 11.1.17+13.

(U)lige funktioner: Lav 11.2.1 og også 11.2.3+4 (nemme!).

Ved forelæsningen kl. 14.30–16.15 gennemgås dels hvorfor Fourier-koefficienterne a_n, b_n har deres udseende, dels hele afsnit 11.2.

NB. På mit websted er der nu en PDF-fil indeholdende eksamensopgaver for 2011-2014. I kan nu øve jer i at regne dem vedrørende Laplacetransformering—dette kan gøres hjemme og f.eks. i grupperummene i fællesskab på onsdag den 24/9, idet der ikke er skemasat undervisning i kurset den dag.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Foruden den reelle Fourierrække i kapitel 11.1 i [K], så har enhver 2π-periodisk funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ også den *komplekse* Fourierrække

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nx} \qquad \text{hvor } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}\,nx}\,dx. \tag{3}$$

Her er $e^{\mathrm{i}\,nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ den komplekse eksponential funktion, og også funktionerne $e^{\mathrm{i}\,nx}$ og $e^{\mathrm{i}\,mx}$ er ortogonale for $n \neq m$ (jvf. Theorem 11.1.1 i [K]). Fremstillingen af $f(x)$ i (3) ovenfor kan derfor **kun** opnås, såfremt man vælger alle c_n til at have værdierne givet ved integralformlen i (3).

Heraf udledes "Fourierrækkernes ABC": Ved overgang mellem de reelle og komplekse Fourierrækker gælder der at $c_0 = a_0$ mens

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) & &\text{for } n = 1, 2, \dots \\ c_n &= \frac{a_n - \mathrm{i}\,b_n}{2}, & c_{-n} &= \frac{a_n + \mathrm{i}\,b_n}{2} & &\text{for } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

7. gang, mandag den 29. september. Først diskuterer vi de følgende opgaver, hvoraf mange er "nemme"—læs afsnit 11.2.2 og regn flest muligt *hjemmefra!*:

Komplekse Fourierrækker: Brug ovenstående til at bestemme de *komplekse* Fourierrækker for følgende funktioner:

$$f(x) = 7, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sin x. \quad \text{(Nemme!)}$$

Find den komplekse Fourierrække for "firkantspændingen" i Eks. 11.1.1.

Reelle funktioner: Vis at når $f(x)$ kun har reelle værdier, så gælder at $\overline{c_n} = c_{-n}$.

Fourierrækker, (u)lige fkt.: Regn opgave 11.2.11. Brug resultatet til at slutte at der som lovet (jvf. også opgave 11.2.20) gælder den klassiske formel

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

—Hvorfor er Fourierrækken konvergent for $x = 1$?

Nye rækker vha. gamle: Vær snedig og regn 11.2.12 ved bruge metoden fra Eksempel 11.2.2 på resultatet i 11.2.11. —Benytter du Theorem 11.2.1 ?

Koefficientformlerne: Udled at integrationen kan flyttes til intervallet $[-2L, 0]$, sådan at

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-2L}^{0} f(x)\cos(n\frac{\pi}{L}x)\,dx.$$

Find en tilsvarende formel for b_n. *Vink:* Efterlign argumentet på oversigt 8.

Kl. 14.30–16.15 afslutter vi gennemgangen af Fourierrækker iht. oversigt nr. 1, dvs. vi færdiggør afsnit 11.2–3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Det er ofte nyttigt, at Fourierkoefficienterne kan bestemmes ved integration over et *vilkårligt* interval af længde 2π. F.eks. kan integrationen flyttes til intervallet $[0, 2\pi]$. I formler betyder dette for komplekse Fourierrækker at, for alle $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\,\mathrm{i}nx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-\,\mathrm{i}nx}\,dx.$$

Dette ses let ud fra opsplitningen $\int_{-\pi}^{\pi} \dots\, dx = \int_{0}^{\pi} \dots\, dx + \int_{-\pi}^{0} \dots\, dx$, hvor man i sidste led kan substituere $x = y - 2\pi$, hvorved $x = 0$ svarer til $y = 2\pi$, mens $x = -\pi$ svarer til $y = \pi$: Pga. 2π-periodiciteten af $f(y)$ og $e^{-\,\mathrm{i}ny}$ giver dette at

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-\,\mathrm{i}nx}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(y-2\pi)e^{-\,\mathrm{i}n(y-2\pi)}\,dy = \int_{\pi}^{2\pi} f(y)e^{-\,\mathrm{i}ny}\,dy.$$

Tilsvarende begrundelser virker for andre intervallet af længde 2π, eller længde $2L$ for $2L$-periodiske funktioner, tillige med formlerne for a_n og b_n.

8. gang, onsdag den 1. oktober.

NB. Øvelserne er flyttet til kl. 10–12. Her vil det blive sidste runde med Fourierrækker:

Halv-periode udviklinger: Regn 11.2.23. (OBS. (a) er nem!)

Forsæt med 11.2.25. (NB: Del (a) har vi mødt før. Hvor?)

Periodiske partikulærløsninger: Lav først 11.3.14 — NB: Fourierrækken for $r(t)$ er kendt fra Eksempel 11.1.1. Man finder at

$$A_n = -\frac{4c}{\pi D_n}, \qquad B_n = \frac{4(1-n^2)}{\pi n D_n}.$$

Regn dernæst 11.3.15.

Fortsæt med gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Kl. 12.30–14.15 vil vi ved forelæsningen gå videre med kapitel 9–10 om såkaldt vektoranalyse iht. oversigt nr. 1. Dog tager vi kun hovedpunkterne fra kapitel 9. Repeter gerne fra 2. semester om partiel differentiation og integration i flere variable—disse ting skal udbygges kraftigt nu !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Som sagt ved gårsdagens forelæsning: I bør bladre kapitel 9 igennem og nikke til det I kender undervejs—og læse nærmere om de ting, I ikke genkender !

I de nye emner kan I med fordel gennemregne Kreysigs taleksempler, blot for at afmystificere tingene.

Hjemmeforberedelse: Regn flest muligt af nedenstående opgaver—mange er uden tekniske vanskeligheder—så I er klar til at diskutere dem på mandag i øvelsestiden!

9. gang, mandag den 6. oktober. Kl. 12.30–14.15 fortsættes gennemgangen af kapitel 10.1–2+4 om kurveintegraler og 10.5+6 om fladeintegraler.

Kl. 14.30–16.15 regnes opgaver i følgende emner:

Periodiske partikulærløsninger: Betragt (som i eksamensopgave 2, januar 2013) differentialligningen

$$y'' - 3y' + 28y = r(t),$$

idet $r(t) = \pi - t$ for $0 \leq t \leq 2\pi$ og i øvrigt er 2π-periodisk.

Find ved direkte integration den komplekse Fourierrække for $r(t)$. (Nem)

Bestem dernæst den komplekse Fourierrække for den 2π-periodiske partikulærløsning til differentialligningen. (Nem)

Udled heraf formler for $a_n(y)$ og $b_n(y)$. (For en gennemregning med reelle Fourierrækker, se mit web-sted ang. januar 2013.)

Gradienter+potentialer: Gennemsku opgave 9.7.43–44.

Rotation af vektorfelt: Regn 9.9.5+6. (*Vink:* Overvej om du kan bruge en af formlerne i 9.9.14, og bevis den formel du bruger.)

Bevis formlerne i Theorem 9.9.2 (regn løs!).

Kurveintegraler: Regn 10.1.2 ved brug af definitionen side 414.

Fortsæt med 10.1.3 og 10.1.7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

10. gang, mandag den 20. oktober kl. 12.30–16.15.
Opgaverne kl. 12.30-14.15 vedrører de nye temaer:

Stiuafhængighed: Gør følgende i opgave 10.2.3:

- opskriv vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z)$;
- begrund at integralet er uafhængigt af integrationsstien;
- bestem værdien af kurveintegralet.

Lav så 10.2.5 på samme måde.

Greens sætning: Kontroller at Green sætning er korrekt i tilfældet hvor $\vec{F} = (y, -x)$ og kurven $\mathcal{C}$ er cirklen $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (Udregn begge integraler.)

Fortsæt med 10.4.3+5.

Kurver: Belyses gennem vores tidligere tema: **Hyperbolsk sinus og cosinus:**

Eftervis at $\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ og $\sinh t := \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ er hinandens afledede:

$$(\cosh t)' = \sinh t, \qquad (\sinh t)' = \cosh t.$$

Begrund at $\sinh' t > 0$, og at vi derfor har en invers funktion $\sinh^{-1} t$.

Vis at når man betragter punkterne $(x, y) = (\pm a \cosh t, b \sinh t)$ for et vilkårligt reelt tal t, så opfylder (x, y) ligningen

$$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

Løsningsmængden til denne ligning er en hyperbel, vi kan kalde H.

Omvendt: Til ethvert punkt (x_0, y_0) på hyperblen H eksisterer der et tal $t_0 \in \mathbb{R}$ sådan at $(x_0, y_0) = (\pm a \cosh t_0, b \sinh t_0)$. Thi sættes $t_0 = \sinh^{-1}(y_0/b)$, så har man dels at $y_0 = b \sinh t_0$, dels at

$$(\frac{x_0}{a})^2 = 1 + (\frac{y_0}{b})^2 = 1 + \frac{(e^{t_0} - e^{-t_0})^2}{4} = \cosh^2 t_0,$$

sådan at $x_0 = \pm a \cosh t_0$—Kontroller disse to påstande om t_0 !

Da hyperblen H således er parametriseret ved $(\cosh t, \sinh t)$ (analogt til enhedscirklen), så kaldes disse funktioner *hyperbolsk cosinus*, hhv. *hyperbolsk sinus*.

Ved forelæsningen kl. 14.30-16.15 ser vi på afsnit 10.5–10.7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Hvis emnekredsen med rotationsfrihed af vektorfeltet $\mathbf{F}$/stiuafhængige kurveintegraler/eksistens af potential(stamfunktion) ikke er velkendt endnu, så vil jeg opfordre til at I hjemme prøver at regne følgende:

Stiuafhængighed: Lav først 10.2.11. (Søg eventuelt inspiration i konklusionerne fra Example 10.2.4.) Se også mit websted for kommenteret løsning ved Jan-Otto Houghoudt.

Fortsæt med 10.2.13+15+17+19.

11. gang, onsdag den 22. oktober. Ved dagens forelæsning vil hovedvægten blive lagt på afsnittene 10.8 og 10.9 om Stokes's rotationssætning (en rumlig udgave af Greens sætning: repeter denne!).

Opgaveregningen vedrører

Greens sætning: Øv dig på formlen ved at regne 10.4.7+9.

Divergenssætningen: Regn først 10.7.9. Fortsæt med 10.7.10. NB. Overfladen skal (principielt) deles op i 6 glatte flader: Øv dig i at finde parametriseringen $\mathbf{r}(u, v)$ for hver af dem, og pas på at normalvektoren peger udad !

Dernæst 10.7.13+17. Og rund af med 10.7.15+16.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Vi tager nu hul på kursets sidste emne: komplekse funktioner. Repeter derfor afsnit 13.1–2 om komplekse tal og afsnit 13.5 om den komplekse eksponentialfunktion.

Læs også gerne afsnit 3.3 frem til "Derivative" side 622 og forbered dig ved at regne:

Komplekse tal og funktioner: For hvilke komplekse tal z er funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z-3)} \quad \text{defineret ?}$$

Skitser definitionsmængden for $f(z)$.

Modulus, afstande: Løs opgave 13.3.1–5 (nemme).

12. gang, mandag den 27. oktober. Kl. 12.30: Vi fortsætter gennemgangen af kapitel 13 fra 13.3 med hovedvægt på differentiation og analytiske funktioner. Desuden omtales konform afbildning fra 17.1, og vi stiler mod at nå 14.1 om *komplekse* kurveintegraler (mange lighedpunkter med 10.1–2).

Kl. 14.30: Ved øvelserne ser vi på følgende opgaver:

Fladeintegraler: Lav 10.9.5.

Rotationssætningen: Få styr på denne ved at regne 10.9.15+17 og 10.9.11.

Real- og imaginærdele: Regn 13.3.10–12 (nemme).

Kompleks differentiation: Regn 13.3.18–20 (nemme).

Analytiske funktioner: Begrund at ethvert polynomium på formen

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

er analytisk (dvs. differentiabel i *ethvert* $z \in \mathbb{C}$).

Er $p(z)$ en *hel* funktion ?

Cauchy–Riemanns ligninger: Regn 13.4.2–5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Vi skal snart benytte rod- og kvotientkriteriet for uendelige rækker. I bedes repetere disse fra kapitel 15.1.

13. gang, mandag den 3. november. Der regnes opgaver i emnerne:

Cauchy-Riemanns ligninger: Lav 13.4.11.

Specielle funktioner: Find real- og imaginærdelene af e^{-z^2}. Begrund at funktionen er en hel analytisk funktion.

Fortsæt med 13.6.6+7+3+4+13 om trigonometriske funktioner ($\cos z$, $\sin z$) og hyperbolske funktioner ($\cosh z$, $\sinh z$).

Harmoniske funktioner/Laplaceligningen: Regn 13.4.13+15.

Konforme afbildninger: Regn 17.1.17.

Som repetition fra sidst går vi først igennem 13.7 om logaritmer og potenser. Dernæst 17.1 om konform afbildning (vinkelbevarelse). Endelig forsættes i kapitel 14 om komplekse kurveintegraler, hvor vi koncentrerer os om forskellene fra det almindelige kurveintegral (i kapitel 10.1+2).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Igår fik vi et kort tilbageblik på en Laplacetransformeret funktion,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Denne er nu en *analytisk* funktion af s i halvplanen hvor $\operatorname{Re} s > k$, når den givne funktion opfylder $|f(t)| \leq Me^{kt}$ for passende konstanter M, $k \geq 0$.

Ved at bruge kompleks funktionsteori kan man endda nedskrive, hvordan den inverse Laplacetransformation ser ud. Forudsat at $F(s)$ er så pæn at man for visse $m, p, R > 0$ har $|F(s)| \leq m/|s|^p$ for $|s| > R$ og $\operatorname{Re} s > k$, så fås inversen af Bromwichs formel:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{k-\mathrm{i}\,\infty}^{k+\mathrm{i}\,\infty} e^{st} F(s)\, dt.$$

Det komplekse kurveintegral i denne formel går mere præcist lodret opad langs linien hvor $\operatorname{Re} s = k$. Formlen nævnes uden bevis, men i det mindste kan I nu se, hvorfor vi ikke i kursets begyndelse kunne angive en formel for $\mathcal{L}^{-1}$.

14. gang, onsdag den 5. november. Kl. 8.15–10 begynder vi med at runde af angående Cauchys integralformel i 14.3–4. Dernæst diskuterer vi potensrækker med udgangspunkt i 15.2–4.

Kl. 10–12 er der opgaveregning—emnerne er MANGE, sørg for at regne mindst en fra hvert tema:

Kurveintegraler: Lav opgave 14.1.21+23+25.

ML-uligheden: Repeter denne ved at regne 14.1.35.

Cauchys integralsætning: Gennemsku 14.2.2 (nem!).

Deformation af kurver: Udfør diskussionen i opgave 14.2.3+4. (Nemme)

Cauchys integralformel: Gennemsku 14.3.13+19 (nemme!).

Konvergensradius: Bestem Taylorrækken for $g(z) = \frac{1}{1-z^2}$ i $z_0 = 0$ (nem!) og vis at dens konvergensradius er $R = 1$.

Regn også 15.2.10+9+7.

PS: Mandag den 10. har vi kursets sidste seance. Vi gennemgår her kapitel 16 om Laurentrækker og integration ved hjælp af residuer—prøv at læse dette på forhånd, så I kan få størst muligt gavn af opgaveregningen kl. 14.30–16.15.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

15. gang, tirsdag den 10. november. Kl. 12.30–14.15 gennemgår vi kapitel 16 om Laurentrækker og residuer—en højst overraskende integrationsteknik !

Opgaveregningen kl. 14.15–16.15 vedrører

Taylorrækker: Find Taylorrækken for $f(z) = e^z + \frac{1}{1-z}$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$ (også kendt som Maclaurin rækken).

Lav så 15.4.3 (nem) og 15.4.4.

Laurentrækker: Regn 16.1.5. *Vink:* Find først Taylorudviklingen af e^z i $z_0 = 1$ ved at udnytte at $e^z = ee^{z-1}$.

Fortsæt med 16.1.6 samt 16.1.7.

Nulpunkter og poler: Regn 16.2.1+7, der er nemme (drop "infinity").

Residuer: Lav 16.3.1.

Residueintegration: Regn først 16.3.7; eventuelt også 16.3.8.

Dernæst udregnes integralerne over $\mathbb{R}$ i opgave 16.4.5+6.

NB ! I kan stille spørgsmål til pensum **mandag den 5. januar 2015**. Vi mødes **kl.12.30** på Fib. 15 i **auditorium A**.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen