MATEMATIK 3
EN3,MP3 28. august 2015

Oversigt nr. 1

Litteratur: I Matematik 3 bruger vi (igen) i efteråret 2015

[K] E. Kreyzig: *Advanced engineering mathematics*, 10. udg., Wiley, 2011.

Beskrivelse: Kurset vil handle om matematiske beregninger indenfor emnerne:

Laplace-transformation: Snedig metode ifm. differentialligninger.

Fourier-rækker: Hvordan man kan opløse funktioner i (uendeligt mange) harmoniske svingninger — og hvornår dette er smart.

Analytiske funktioner: Om *komplekse* funktioner, hvornår de kan differentieres og integreres samt udvikles i potensrækker (en slags Taylor-polynomier af "uendeligt høj" grad).

Vektoranalyse: Integralsætninger for gradient, divergens og rotation.

Praktisk: Vi mødes 15 gange à 4 timer. Hver seance består af 2 timers opgaveregning i grupperummene fulgt af 90 minutters forelæsning.

Uge	Dato	Nr.	Emner
36	3/9	1	kapitel 6.1–2: Laplace-transformation, differentialligninger.
37	8/9	2	kapitel 6.3+6.6: Trinfunktionen. Differentiation af Laplacetransformerede.
38	14/9	3	kapitel 6.5+6.7–9: Foldning. Mere om differentialligninger.
	17/9	4	kapitel 11.1–2: Fourierrækker I: periodiske funktioner.
39	21/9	5	kapitel 11.2: Fourierrækker II: lige og ulige funktioner.
40	28/9	6	kapitel 11.2–3: Fourierrækker III: tvungne svingninger.
	1/10	7	kapitel 13: Kompleks differentiation,
			Cauchy–Riemanns differentialligninger for analyticitet.
41	5/10	8	kapitel 14.1–2: Komplekse kurveintegraler.
			kapitel 14.3: Cauchys integralformler for analytiske funktioner.
43	19/10	9	kapitel 15.1: Talfølger, konvergens. Uendelige rækker.
	22/10	10	kapitel 15: Potens- og Taylorrækker.
44	26/10	11	kapitel 17.1: Konform afbildning. Afrunding af komplekse funktioner.
45	2/11	12	kapitel 9.1–5: Vektorfelter. Prik- og krydsprodukt. Kurvelængde.
			kapitel 9.7–9: Gradient. Divergens og rotation.
			kapitel 10.1–2: Kurveintegraler.
	5/11	13	kapitel 10.4–6: Greens sætning i planen. Fladeintegraler.
46	9/11	14	kapitel 10.7: Gauss's sætning (divergenssætningen).
47	16/11	15	kapitel 10.8–9: Potentialer. Stokes's sætning (rotationssætningen).

Justeringer kan forekomme undervejs. (**Ændret 1. oktober**)

Pensum: Den gennemgåede litteratur i de 15 seancer, der er skemasat.
Eksamen: Intern skriftlig prøve med alle hjælpemidler—dog ingen elektroniske !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Repetition. Vi kommer til at udføre mange udregninger med **komplekse tal** i kurset, både ved forelæsninger og øvelser. Studieordningen lægger også vægt på dette. Det vil derfor være en god ide, at I inden kursets start repeterer angående:

> Komplekse tal, modulus og argument, kompleks konjugering, omskrivning til reel nævner, komplekse eksponentialfunktioner, Eulers formler for sinus og cosinus.

Som forberedelse til seancerne 1, 2, 3 og 6 kan I med fordel repetere fra 2. semester, hvordan man løser differentialligninger af første og anden orden af formen:

$$\begin{aligned} y'(t) + p(t)y(t) &= q(t), \\ y''(t) + ay'(t) + by(t) &= r(t). \end{aligned}$$

Det kan eksempelvis gøres ved at læse i afsnit 2.4 i [K], inklusive eksempel 2.4.2.

1. gang, torsdag den 3. september.

Kl. 12.30–14.15. Forelæsning over kapitel 6.1–6.2 i [K].
Hjemmeforberedelse:

- Læs de første 2 sider i kapitel 6.1 om Laplacetransformering af funktioner.
- Studer eksempel 6.1.1 i detaljer—og prøv at bruge metoden fra eksemplet til at finde den Laplacetransformerede af førstegradspolynomiet t. (Brug partiel integration.)

Bladr videre i kapitel 6.1–6.2 og orienter dig, om hvilke emner der behandles.

Kl. 14.30–16.15. Her mødes vi til øvelser i de lettest tilgængelige dele af det, der blev gennemgået ved forelæsningen. Dvs.:

Komplekse tal:

- Skriv brøkerne
$$\frac{6 - \mathrm{i}\,4}{1 + \mathrm{i}}, \qquad \frac{7 + \mathrm{i}\,14}{-\sqrt{5} + \mathrm{i}\,3}$$
på formen $x + \mathrm{i}\,y$ for passende reelle tal x, y.
- Find z^2 og $|z|^2$ når $z = 3 - \mathrm{i}\,4$. (Overraskende!?)
- Find modulus og (et) argument for $z = 2 - \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$.
Skriv z på formen $re^{\mathrm{i}\,\theta}$.

- Find real- og imaginærdelen for $z = 4e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$.

  Vink: Løs $z^2 = 16e^{\mathrm{i}\,\pi/6}$ ved at bruge de kendte værdier $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$. (Svar: $\operatorname{Re} z$ og $\operatorname{Im} z$ er givet ved $\sqrt{6} \pm \sqrt{2}$)!)

Laplacetransformering: Regn 6.1.1+3+5+7 (nemme!), brug tabellen og IKKE computer!

Dernæst 6.1.11+9 (i den rækkefølge) ved brug af definitionen på Laplace-transformationen.

Rund af med at lave 6.1.20+21.

Invers transformering: Lav 6.1.31+32.

NB! Når jeg skriver **"nemme!"** er det fordi, at opgaverne har et kort svar på 1-2 linier (hvis de gribes rigtigt an). Spørg om hjælp hvis I ikke kan finde de korte svar.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

I opgaverne den 3. oktober mødte vi funktionerne hyperbolsk sinus og cosinus, $\sinh t$ og $\cosh t$. Sidstnævnte har stor interesse for ingeniører, da den beskriver *kædelinien*. Se nærmere bagerst i eksempelkataloget [E] fra 1. studieår. (Findes på kursets moodleside.)

2. gang, tirsdag den 8. september.

Kl. 8.15-12.00. Ved øvelserne kl. 8.15-10.00 regner vi følgende opgaver:

Invers transformering: Lav 6.1.25 og så 6.1.37+39+41.

Snedighed: Lav 6.2.17+19 ved for den givne funktion $f(t)$ at bestemme $\mathcal{L}(f')$ på 2 måder: Brug både linearitet og reglen for de afledte.

Differentialligninger af 1. orden: Regn 6.2.2 vha. formel (1) side 211.

Differentialligninger af 2. orden: Regn 6.2.3+5+7. *Vink:* Brug formel (7) side 214.

Gamma-funktionen*: Læs og lær om $\Gamma(x)$ side A54 og regn efter at definitionen i (24) giver formlerne i (25)–(26) som påstået. (Nemme!)

Potensfunktioner*: Regn opgave 6.1.22.

Opgaverne med * er til de hurtige eller særligt interesserede.

Kl. 10.15–12.00 i aud. B:. Forelæsningen begynder med et gensyn med afsnit 6.2 i [K], hvor vi nu går mere i detaljer (Example 6.2.5–6 overspringes). Siden forsættes med kapitel 6.3 og 6.6 i [K].

Hjemmeforberedelse: Læs afsnit 6.2 igen. Dernæst de første to sider i 6.3 om Heavisides trinfunktion $u(t-a)$.

Studer udledelsen af formel (2) for den Laplacetransformerede $\mathcal{L}(u(t-a))$ i detaljer—og find en væsentlig trykfejl !

Bladr videre i 6.3 og orienter dig om emnerne. Ligeså i 6.6 til og med halvdelen af side 240 (afsnittet “Special linear ODE’s with variable coefficients” forbigås).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

NB: Regn så vidt muligt 1–2 fra hvert emne hjemmefra ! Sørg for at få talt med hjælpelæreren om opgaver fra alle emner !

3. gang, mandag den 14. september.
Her fortsætter vi med forelæsning kl. 14.30–16.15, først over Example 6.3.3. Siden fortsættes med afsnit 6.5 om foldning, afsnit 6.6 (jvf. anden gang) og et eksempel fra afsnit 6.7. Bemærk også tabellerne i afsnit 6.8–9 i [K].

Opgaveregningen kl. 12.30-14.15 fokuserer på:

Differentialligninger: Opgave 6.2.11. (Se mit websted for et løsningsforslag.)

Trinfunktionen: Regn 6.3.3+4+5 — tegn f's graf, skriv en formel for $f(t)$ vha. $u(t-a)$, bestem til sidst $\mathcal{L}(f)$!

Translationssætningen (Thm. 6.3.1): Regn 6.3.15+12, og dernæst 6.3.14+13.

Diskontinuerte højresider: Lav opgave 6.3.22.

Vink: Udnyt omskrivningen $4tu(t-1) = 4(t-1)u(t-1) + 4u(t-1)$ til at repræsentere højresiden $h(t)$ som

$$h(t) = 4t - 4(t-1)u(t-1) + 4u(t-1).$$

Fortsæt med opgave 6.3.23.

4. gang, torsdag den 17. september. Ved øvelserne ser vi på emnerne

Transformation via differentiation: Regn først 6.6.3, men bemærk at funktionen skal være $f(t) = \frac{t}{4}e^{-2t}$. (Nem)

Dernæst 6.6.4–11, som giver god oversigt over kapitel 6's formler.

Foldning: Lav opgave 6.5.3+7 (nemme!).

Dernæst 6.5.21+23+25, bemærk overskriften !

Stambrøker: Regn (lidt af) 6.5.26 for sammenligningens skyld.

Integralligninger: Opgave 6.5.11.

Koblede ligninger: Lav 6.7.19 (man kan gå frem som i Ex. 6.7.2). Fortsæt med 6.7.20.

Forelæsningen fokuserer på kapitel 11.1–2.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Det kan anbefales at anskaffe sig *Mathematical Handbook of formulas and tables* af Murray Spiegel (Schaum's outline series, Mcgraw-Hill), hvor der f.eks. er mange konkrete Fourier-rækker mmm.

Hjemmeforberedelse: Læs i kapitel 11.2 om definitionen af lige og ulige funktioner: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaldes en

$$\begin{aligned} \text{lige funktion dersom} \qquad & f(-x) = f(x), \\ \text{ulige funktion dersom} \qquad & f(-x) = f(x). \end{aligned}$$

Regn dernæst opgaverne nedenfor under overskriften "(U)lige funktioner".

Fortsæt med at regne de øvrige opgaver, så vidt muligt, så I kan udnytte hjælpelæreren med det samme fra kl. 12.30.

5. gang, mandag den 21. september. Vi regner opgaver kl. 12.30–14.15 om

Periodiske funktioner: Lav 11.1.7+10, tegn evt. først grafen for $f(x) = |x|$ (nemme). Husk også at tegne (lidt) både for $x < -\pi$ og for $x > \pi$.

Prøv 11.1.3.

Fourier-koefficienter: Regn først 11.1.21. Dernæst 11.1.16. Skitser graferne for $-3\pi \leq x \leq 3\pi$—er resultaterne for Fourier-rækkerne overraskende?

Fortsæt med 11.1.17+13. Overraskende ?

(U)lige funktioner: Lav 11.2.1 og også 11.2.3+4 (nemme).

Fourierrækker generelt*: Brug din PC til at plotte $S_{10}(x), S_{20}(x)$ og $S_{30}(x)$ fra eksemplet side 478 for $-4 \leq x \leq 4$. Sammenlign med Figur 261 !

Den dårlige tilnærmelse i diskontinuitetspunkterne kaldes *Gibbs fænomen*. Dette har enorm interesse i fysik og teknik. Se eventuelt nærmere på

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon`.

Ved forelæsningen kl. 14.30–16.15 gennemgås dels hvorfor Fourier-koefficienterne a_n, b_n har deres udseende, og ligeså for c_n; dels hele afsnit 11.2.

NB. På mit websted er der en PDF-fil indeholdende eksamensopgaver for 2011-2015. I kan nu øve jer i at regne dem vedrørende Laplacetransformering—dette kan gøres hjemme eller i grupperummene i fællesskab.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Foruden den reelle Fourierrække i kapitel 11.1 i [K], så har enhver 2π-periodisk funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ også den *komplekse* Fourierrække

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nx} \qquad \text{hvor } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}\,nx}\,dx. \tag{1}$$

Her er $e^{\mathrm{i}\,nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ den komplekse eksponentialfunktion, og som vist er også funktionerne $e^{\mathrm{i}\,nx}$ og $e^{\mathrm{i}\,kx}$ er ortogonale for $n \neq k$ (jvf. Theorem 11.1.1 i [K]). Fremstillingen af $f(x)$ i (1) ovenfor kan derfor **kun** opnås, hvis alle c_n har værdierne givet ved integralformlen i (1); jvf. side 479–480 i det relle tilfælde.

Som konsekvens af dette får man "Fourierrækkernes ABC": Ved overgang mellem de reelle og komplekse Fourierrækker gælder der at $c_0 = a_0$ mens

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) & &\text{for } n = 1, 2, \dots \\ c_n &= \frac{a_n - \mathrm{i}\,b_n}{2}, & c_{-n} &= \frac{a_n + \mathrm{i}\,b_n}{2} & &\text{for } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

6. gang, mandag den 28. september. Først diskuterer vi de følgende opgaver, hvoraf mange er "nemme"—læs afsnit 11.2.2 og regn flest muligt *hjemmefra!*:

Komplekse Fourierrækker: Brug ovenstående til at bestemme de *komplekse* Fourierrækker for følgende funktioner:

$$f(x) = 7, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos(5x). \quad \text{(Nemme!)}$$

Find den komplekse Fourierrække for "firkantspændingen" i Eks. 11.1.1.

Reelle funktioner: Vis at når $f(x)$ kun har reelle værdier, så gælder at $\overline{c_n} = c_{-n}$.

Fourierrækker, (u)lige fkt.: Regn opgave 11.2.11. Brug resultatet til at slutte at der som (jvf. også opgave 11.2.20) gælder den klassiske formel

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Nye rækker vha. gamle: Vær snedig og regn 11.2.12 ved bruge metoden fra Eksempel 11.2.2 på resultatet i 11.2.11. —Benytter du Theorem 11.2.1 ?

Koefficientformlerne: Vis at integrationen kan flyttes til intervallet $[0, 2\pi]$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx.$$

Find en tilsvarende formel for b_n. *Vink:* Substituer i integralet over $[-\pi, 0]$.

Kl. 14.30–16.15 afslutter vi gennemgangen af Fourierrækker iht. oversigt nr. 1, dvs. vi færdiggør afsnit 11.2–3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Som hjemmeforberedelse til næste gang bedes man læse afsnit 13.1–2 for at repetere almindelig regning med komplekse tal og fortsæt med afstande mm. på side 319–320. Repeter dernæst ved at regne

modulus+argument: Regn opgave 13.2.1+3+5.

andengrads ligninger: Løs opgave 13.2.29.

afstande: Løs opgave 13.3.1–5 (nemme).

Prøv også at se, hvor meget du kan genkende i afsnit 13.5 om den komplekse eksponentialfunktion.

7. gang, torsdag den 1. oktober. NB. Seancen er placeret kl. 12.30–16.15. Øvelserne vil blive sidste runde med Fourierrækker:

Halv-periode udviklinger: Regn 11.2.23. (OBS. (a) er nem!)

Forsæt med 11.2.25. (NB: Del (b) har vi mødt før. Hvor?)

Periodiske partikulærløsninger: Lav først 11.3.14 — NB: Fourierrækken for $r(t)$ er kendt fra Eksempel 11.1.1. Man finder at

$$A_n = -\frac{4c}{\pi D_n}, \qquad B_n = \frac{4(1-n^2)}{\pi n D_n}.$$

Regn dernæst 11.3.15.

Periodiske partikulærløsninger, bestemt komplekst: Betragt (som i eksamensopgave 2, januar 2013) differentialligningen

$$y'' - 3y' + 28y = r(t),$$

idet $r(t) = \pi - t$ for $0 \leq t \leq 2\pi$ og i øvrigt er 2π-periodisk.

Find ved direkte integration den komplekse Fourierrække for $r(t)$. (Nem: Vi har mødt den før...) Bestem dernæst den komplekse Fourierrække for den 2π-periodiske partikulærløsning til differentialligningen. (Nem)

Udled heraf formler for $a_n(y)$ og $b_n(y)$. (For en gennemregning med reelle Fourierrækker, se mit web-sted ang. januar 2013.)

Ved forelæsningen kl. 14.30–16.15 begynder vi på kapitel 13 om *komplekse funktioner*. Vi når antageligt afsnittene 13.3–6.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Som hjemmeforberedelse kan man se på et par helt enkle opgaver:

Andengradsligninger: Repeter hvordan man løser disse med komplekse tal. (Tema: Hvad gør man ved kvadratroden?)

Komplekse funktioner: For hvilke komplekse tal z er funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z-3)} \quad \text{defineret ?} \tag{*}$$

Skitser definitionsmængden for $f(z)$ (dvs. angiv med krydser de punkter i den komplekse plan hvor f *ikke* er defineret…).

Regn også gerne resten fra "Komplekse tal" på oversigt nr. 2—og gå endelig til lektiecafeen den 2. oktober, hvis du er i tvivl om regning med komplekse tal !

8. gang, mandag den 5. oktober. Der regnes opgaver i emnerne:

Real- og imaginærdele: Regn 13.3.10–12 (nemme).

Kompleks differentiation: Regn 13.3.18–20 (nemme).

Bestem $f'(z)$ for funktionen i formlen (*) ovenfor. *Vink:* Udnyt regnereglerne for kompleks differentiation.

Analytiske funktioner: Begrund at ethvert polynomium på formen

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

er analytisk (dvs. differentiabel i *ethvert* $z \in \mathbb{C}$).

Er $p(z)$ en *hel* funktion ?

Cauchy–Riemanns ligninger: Regn 13.4.2–5.

Specielle funktioner: Find real- og imaginærdelene af e^{-z^2}. Begrund at funktionen er en hel analytisk funktion.

Fortsæt med 13.6.6+7+3+4+13 om trigonometriske funktioner ($\cos z$, $\sin z$) og hyperbolske funktioner ($\cosh z$, $\sinh z$).

Harmoniske funktioner/Laplaceligningen: Regn 13.4.13+15.

Som repetition fra sidst går vi først igennem 13.7 om logaritmer og potenser. Endelig forsættes i kapitel 14 om *komplekse* kurveintegraler (det almindelige kurveintegral mødes senere i kapitel 10.1+2).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Her er et kort tilbageblik på en Laplacetransformeret funktion:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Indsætter man et *komplekst* tal s, så bliver $F(s)$ en *analytisk* funktion af s i halvplanen hvor $\operatorname{Re} s > k$, forudsat at givne funktion opfylder den milde betingelse, at $|f(t)| \le Me^{kt}$ for passende konstanter M, $k \ge 0$. (Jvf. afsnit 6.1.)

Ved at bruge kompleks funktionsteori kan man endda *nedskrive*, hvordan den inverse Laplacetransformation ser ud. Forudsat at $F(s)$ er så pæn at man for visse $m, p, R > 0$ har $|F(s)| \le m/|s|^p$ for $|s| > R$ og $\operatorname{Re} s > k$, så fås inversen af Bromwichs formel:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{k-\mathrm{i}\,\infty}^{k+\mathrm{i}\,\infty} e^{st} F(s)\, dt.$$

Det *komplekse kurveintegral* i denne formel går mere præcist lodret opad langs linien hvor $\operatorname{Re} s = k$. Formlen nævnes uden bevis, men i det mindste kan I nu se, hvorfor vi ikke i kursets begyndelse kunne angive en formel for $\mathcal{L}^{-1}$.

9. gang, mandag den 19. oktober.

Kl. 12.30–14.15 er der opgaveregning—emnerne er MANGE, sørg for at regne mindst en fra hvert tema:

Cauchy-Riemanns ligninger: Lav 13.4.11.

Logaritmer: Skriv $z^{1/n}$ ved hjælp af $\exp$ og Ln. Hvorfor er $(z^{1/n})^n = z$?

Kurveintegraler: Lav opgave 14.1.21+23+25.

Cauchys integralsætning: Gennemsku 14.2.2 (nem!).

Deformation af kurver: Udfør diskussionen i opgave 14.2.3 (brug evt. Theorem 14.2.2). Fortsæt med 14.2.4. (Nem, se f.eks. Fig. 354.)

Cauchys integralformel: Gennemsku 14.3.13+19 (nemme!).

Ved forelæsningen beskæftiger vi os med kapitel 15.1, hvor temaet er at summere uendeligt mange tal. . . (Jo, det kan man godt!)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

10. gang, torsdag den 22. oktober, kl. 8.15-12.00. Opgaveregningen kl. 8-10 drejer sig om **uendelige rækker**:

Kvotientrækker: Brug din *intuition* til at finde summen af den uendelige række

$$1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^n + \ldots$$

Find dernæst facit vha. en relevant formel og sammenlign !

Udregn $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$. *Vink:* Hvilken kvotient q kan bruges?

Brug kvotientkriteriet til at afgøre om følgende rækker konvergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}.$$

Sammenligningskriteriet (Thm. 15.1.5) Vis at rækken nedenfor konvergerer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 4} + \ldots.$$

Konvergens/divergens Regn 15.1.16–25. Husk at angive *hvilket* kriterium du brugte til at finde svarene. (NB. Facit er forkert i 15.1.17, som ses ved at splitte afsnitsfølgen op i real- og imaginærdele, der begge konvergerer.)

Videnskabelige beregninger Dette kan belyses ved at regne 15.1.30. (*Vink:* Man kan f.eks. begynde med at opnå konvergens af rækken, ved at vise at den opfylder kvotientkriteriet med $q = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) < 1$.)

Grænseværdi: Lav f.eks. opgave 15.1.12.

NB ! Som et supplement til [K] kan nævnes følgende velkendte resultater:

Potenskriteriet: En uendelig række af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{konvergerer hvis og kun hvis} \quad 1 < p < \infty.$$

Alternerende rækker: Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \qquad \text{konvergerer når } b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots > 0$$
$$\text{og desuden } b_n \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Endda: Når $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ og afsnitsfølgen betegnes (s_n), så gælder $0 < (-1)^n (s - s_n) < b_{n+1}$. Heraf ses, at fejlen $s - s_n$ både har samme fortegn og højst samme størrelse som det først udeladte led!

Begge disse resultater kan være nyttige, både når man vil bruge sammenlignings-kriteriet og mere direkte.

I opgave 5.1.24 kan man vise at $|z_{n+1}/z_n|$ går mod $3e^{-\ln'(1)} = \frac{3}{e} > 1$, så rækken divergerer iflg. kvotientkriteriet. Faktisk går det almindelige led endda ikke mod nul—dette kan vises vha. Stirlings formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n,$$

som I kan finde på wikipedia. (På engelsk er denne database meget pålidelig: anbefales !)

Ved forelæsningen kl. 10.15–12.00 tager vi fat på kapitel 15.2 om potensrækker for analytiske funktioner.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

11. gang, mandag den 26. oktober.
Vi fortsætter gennemgangen af kapitel 15.2–4 om egenskaberne ved *sumfunktionen* af en potensrække,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

F.eks. skal vi se, at sumfunktionen altid er analytisk på *konvergenscirkelskiven*. Desuden omtales konform afbildning fra 17.1.

Sidste gang omtalte vi potensækker for kendte funktioner, se side 694–695. Hovedvægten lå dog på at bestemme konvergensradius R, hvor man har formlerne

$$R = \frac{1}{L^*}, \qquad L^* = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|, \qquad \text{(når alle } a_n \neq 0)$$
$$R = \frac{1}{L^{**}} \qquad L^{**} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Hvis grænseværdierne ikke eksisterer, så kan man for L^* hhv. L^{**} benytte det *største* fortætningspunkt for talfølgen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hhv. $\sqrt[n]{|a_n|}$. (NB. Dette korrigerer en fejl i forelæsningen.) Jvf. Example 15.2.6.

Ved øvelserne ser vi på følgende opgaver:

Konvergensradius: Bestem potensrækken for $g(z) = \frac{1}{1-z^2}$ i $z_0 = 0$ (nem: substituer $w = z^2$ og opnå en kvotientrække). Vis at rækkens konvergensradius er $R = 1$. *Vink:* Det er nemt at se at $R \geq 1$ (jvf. substitutionen). Men $R > 1$ er umuligt (hvilket z på enhedscirklen giver divergens?), så derfor er $R = 1$.

Regn så 15.2.6–18. Nogle er nemme, f.eks. når $R = 0$; i andre kan man udnytte at

$$n^{1/n} \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

(Thi $n^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\ln n) \to 1$, da det er en kendt ting at $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.)

Potensrækker: Træning i begreberne fås af opgave 15.2.1 og 15.2.5.

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Essensen af afsnit 15.4, som vi så på sidste gang, er den, at for en *analytisk* funktion $f(z)$ har man en Taylor's formel uden restled, i den forstand at der er uendeligt mange af de sædvanlige led, som så udgør funktionens Taylor-*række*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n.$$

Det anbefales at I ser nærmere på de konkrete eksempler på side 694–696.

12. gang, mandag den 2. november. Øvelserne kl. 12.30–14.15 drejer sig om

Rækker kun med (u)lige potenser: Regn 15.2.5 ved at substituere $w = z^2$.

Vis det tilsvarende resultat for rækker med kun ulige potenser af z.

Cauchy-produktet: Regn først 15.3.4.

Bestem dernæst potensrækken centreret i $z_0 = 0$ for hver af funktionerne

$$\frac{1}{1-z}\,\mathrm{Ln}(1+z), \quad e^z\,\mathrm{Ln}(1+z).$$

differentiation/integration: Gennemsku 15.3.5 (man kan sætte $(z-2i)^2$ udenfor parentes). Fortsæt med 15.3.13+15. (Pas på fejl i facitlisten.)

Taylorrækker: Find Taylorudviklingen af e^z i $z_0 = 1$. *Vink:* Man kan udnytte at $e^z = ee^{z-1}$.

Bestem Taylorrækken for $f(z) = e^z + \frac{1}{1-z}$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$.

Lav så 15.4.3 (nem) og 15.4.4.

Kl. 14.30–16.15 vil vi ved forelæsningen runde af om komplekse funktioner, hvor vi mangler at gennemgå konformitet (vinkelbevarelse) fra afsnit 17.1.

Desuden vil vi gå videre med kapitel 9 om grundbegreber i vektoranalyse; jvf. oversigt nr. 1. Fokus kommer til at ligge på de nye ting: Vektorfelter, gradient, rotation og divergens.

Repeter gerne fra 2. semester om kurver, partiel differentiation og integration i flere variable—disse ting skal udbygges kraftigt nu !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Kapitel 9 er så langt at vi ikke kan gennmgå alt i detaljer: Så I bør bladre kapitel 9 igennem og nikke til det I kender undervejs—og læse nærmere om de ting, I ikke genkender !

I de nye emner kan I med fordel gennemregne Kreysigs taleksempler, blot for at afmystificere tingene.

Hjemmeforberedelse: Regn flest muligt af nedenstående opgaver—mange er uden tekniske vanskeligheder—så I er klar til at diskutere dem på torsdag i øvelsestiden!

13. gang, torsdag den 5. oktober. Kl. 8.15–10.00 regnes opgaver om:

Konforme afbildninger: Regn 17.1.17.

Gradienter+potentialer: Gennemsku opgave 9.7.43–44.

Rotation af vektorfelt: Regn 9.9.5+6. (*Vink:* Overvej om du kan bruge en af formlerne i 9.9.14, og bevis den formel du bruger.)

Bevis formlerne i Theorem 9.9.2 (regn løs!).

Kurver: Belyses gennem vores tidligere tema: **Hyperbolsk sinus og cosinus:**

Regn efter at $\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ og $\sinh t := \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ er hinandens afledede:

$$(\cosh t)' = \sinh t, \qquad (\sinh t)' = \cosh t.$$

Begrund at $\sinh' t > 0$, og at vi derfor har en invers funktion $\sinh^{-1} t$.

Vis at når man betragter punkterne $(x, y) = (\pm a\cosh t, b\sinh t)$ for et vilkårligt reelt tal t, så opfylder (x, y) ligningen

$$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

Løsningsmængden til denne ligning er en hyperbel, vi kan kalde H.

Omvendt: Til ethvert punkt (x_0, y_0) på hyperblen H eksisterer der et tal $t_0 \in \mathbb{R}$ sådan at $(x_0, y_0) = (\pm a\cosh t_0, b\sinh t_0)$. Thi sættes $t_0 = \sinh^{-1}(y_0/b)$, så har man dels at $y_0 = b\sinh t_0$, dels at

$$(\frac{x_0}{a})^2 = 1 + (\frac{y_0}{b})^2 = 1 + \frac{(e^{t_0} - e^{-t_0})^2}{4} = \cosh^2 t_0,$$

sådan at $x_0 = \pm a\cosh t_0$—Kontroller disse to påstande om t_0 !

Da H således er parametriseret ved $(\cosh t, \sinh t)$ (analogt til enhedscirklen), så kaldes disse funktioner *hyperbolsk cosinus*, hhv. *hyperbolsk sinus*.

Kl. 10.15–12.00 fortsættes gennemgangen af kapitel 10.1+2+4 om kurveintegraler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Sidste gang nåede vi til og med afsnit 10.2.

Til næste gang bedes I repetere integration i polære koordinater ($r\,dr\,d\theta$). Desuden bør I læse op på sfæriske koordinater. Bemærk at der på side 440 i [K] benyttes andre vinkler u, v end de sædvanlige i sfæriske koordinater.

14. gang, mandag den 9. november kl. 12.30–16.15.

Opgaverne kl. 12.30-14.15 vedrører de nye temaer:

Kurveintegraler: Regn 10.1.2 ved brug af definitionen side 414. *Vink:* Tegn først kurven C.

Fortsæt med 10.1.3 og 10.1.7.

Stiuafhængighed+potentialer: Gør følgende i opgave 10.2.3:

- opskriv vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z)$;
- begrund at integralet er uafhængigt af integrationsstien;
- bestem et potential $f(x, y, z)$ for $\vec{F}$;
- bestem værdien af kurveintegralet.

Lav så 10.2.5+7 på samme måde.

Endelig 10.2.13+15 (bemærk at det skal afgøres *om* der er et potential).

Ved forelæsningen kl. 14.30–16.15 ser vi på afsnit 10.4 om Green's sætning, afsnit 1.5–6 om det essentielle i fladeintegraler (og arealer) samt 10.7 om Gauss's divergenssætning.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

15. gang, mandag den 16. november.
Opgaveregningen kl. 8-10 vedrører

Greens sætning: Kontroller at Green sætning er korrekt i tilfældet hvor $\vec{F} = (y, -x)$ og kurven $\mathcal{C}$ er cirklen $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (Udregn begge integraler.)

Fortsæt med 10.4.3+5.

Mere om Greens sætning: Øv dig på formlen ved at regne 10.4.7 og 10.4.9 (nb: man skal selv opdage, at $x > 0$ er nødvendigt).

Fladeintegraler: Lav 10.6.1+3.

Divergenssætningen: Regn først 10.7.9.

Fortsæt med 10.7.10. NB. Overfladen skal (principielt) deles op i 6 glatte flader: Øv dig i at finde parametriseringen $\mathbf{r}(u, v)$ for hver af dem, og pas på at normalvektoren peger udad !

Dernæst 10.7.13+17.

Ved dagens forelæsning vil hovedvægten blive lagt på afsnit 10.9 om Stokes's rotationssætning—den er, som vi skal se, en rumlig udgave af Greens sætning (repeter denne!), hvor vi kan "genbruge" vores kendskab til kurve- og flade integraler.

Rotationssætningen kan man øve sig i ved at regne 10.9.15+17. og 10.9.11.

NB ! I kan stille spørgsmål til pensum **mandag den 4. januar 2015**. Vi mødes **kl. 10.15–12.00** på Fib. 15 i **auditorium B**.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen