Oversigt nr. 1

1. og 2. møde (15/2 og 2/3). Her har vi læst og gennemgået

kapitel 1 i [GKP] om mængdeteoretisk topologi.

Dog er følgende kursorisk: 1.1; 1.5.10–13; 1.6.13–14.

3. gang, torsdag den 9/3. Her studerer vi hvordan man alment kan forsyne et vektorrum med en fornuftig topologi, så snart der er givet en tilpas stor familie af seminormer.

Konkret diskuterer vi

kapitel 2.4.1–2.4.5 i [GKP]; medtag gerne 2.4.8 allerede nu.

For at illustrere den svage topologi hørende til en familie af seminormer kan I overveje at

- på et Hilbertrum H giver hver vektor $y \in H$ en afbildning $H \to \mathbb{C}$ ved forskriften
$$x \mapsto |(\, x \,|\, y \,)|. \tag{1}$$
Denne er en seminorm (vis det!). Herved udstyres H med den svage topologi; kaldes denne σ bliver H_σ (dvs. parret (H, σ)) et topologisk vektorrum (forklar vha. kapitel 2.4!).

  Giv to argumenter for at σ er svagere end normtopologien: (1) antag $\|x_\lambda - x\| \to 0$, vis da at $x_\lambda \to x$ i H_σ; (2) se på en omegnsbasis for $x = 0$ via $(*)$ i 2.4.1; tag gerne $H = \ell_2$ og tænk over hvor mange koordinatretninger en sådan basisomegn kontrollerer.

- rummet $C^N(\Omega)$, hvor $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ er en vilkårlig åben mængde, og $N \in \mathbb{N}_0$, har et system af seminormer
$$\|u\|_{N,K} = \sup\{\, |D^\alpha u(x)| \mid x \in K,\ |\alpha| \le N \,\}. \tag{2}$$
Her er $K \subset \Omega$ en vilkårlig kompakt mængde. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ er et multiindex med længde $|\alpha| = a_1 + \dots + \alpha_n$ som bruges til at indføre den bekvemme notation
$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} = (-\,\mathrm{i})^{|\alpha|} \tfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \tfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{3}$$
Med seminormerne $\|\cdot\|_{N,K}$ er $C^N(\Omega)$ et topologisk vektorrum. (Hvad med $C^\infty(\Omega)$?)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

4. gang, torsdag den 16/3. Her har vi gennemgået 2.4.6-11 i [GKP], foruden opgaverne fra 1. seddel.

5. gang, torsdag den 23/3, kl. 10–12. Her ser vi på 2.4.12–13 og 2.5.1–2 i [GKP], men som baggrund for 2.4.13 må I nok også læse 2.1.5–7.

Som konkrete eksempler må vi pt. notere at $L^2(\Omega)$ står for mængden af funktioner $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, hvor $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ er en åben mængde, som opfylder at $|f|^2$ er Lebesgueintegrabel på Ω, dvs. $\int_\Omega |f(x)|^2\,dx < \infty$. (Mere præcist er der tale om mængder af ækvivalensklasser af funktioner stemmende overens n.o.) Som vi senere skal få at se i Integrations- og Fourierteori, så er $L^2(\Omega)$ *fuldstændigt* mht. metrikken induceret af det indre produkt $(\, f \mid g\,) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Mao. er $L^2(\Omega)$ et *Hilbertrum*.

På den baggrund bedes I læse kapitel 5.1 og 5.2.1 om Fourierrækker i mine noter om funktionalanalyse; disse er tilgængelige fra mit websted. (NB! Det kunne tænkes at der kommer væsentlige tilføjelser senere i semestret, så det nok bedst at I ej refererer til sidetal men til afsnit osv.) Bemærk at Weierstrass' approximationssætning fra afsnit 2.3 også indgår i argumenterne.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Jeg har nu rettet trykfejl i mine noter, circa i det omfang vi diskuterede idag.

6. gang, mandag den 10. april, kl. 12.30. Vi har aftalt at I læser hele kapitel 4 og resten af 5 i noterne. (Kapitel 4 for en oversigt over basale forhold ifm. Hilbertrum.)

Desuden vil vi tage hul på de ubegrænsede operatorer i Hilbertrum. Som en god kilde foreslår jeg vi bruger et notesæt af Gerd Grubb (KU), nærmere bestemt kapitel 10 som er tilgængeligt fra

http://www.math.ku.dk/ grubb/dist10.pdf

De er også tilgængelige fra `/user/jjohnsen/Kurser/Noter/GGnoter/Dist06/dist10.pdf`.

Heri ser vi på afsnittene 10.1–10.3 til næste gang; I kan også regne opgaverne 10.1–10.19 (sidstnævnte vil nok være en seriøs udfordring).

Det er en stor mundfuld, men I har jo ikke så meget kursusaktivitet pt. Læs for eksempel 2 sider og regn en opgave om dagen. (NB! Det bliver sværere jo længere i kommer…)

Nysgerrige kan læse om atom/kvantefysikkens matematik i et notesæt af Michael Loss, som jeg har fået anbefalet af Thomas Østergaard. Det kan tilgås på `/user/jjohnsen/Kurser/Noter/MichLOSSnoter/stability010206.pdf`.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Mine noter er idag blevet opdateret, hovedsageligt med et bedre afsnit om Sobolevrum i kapitel 5.

7. gang, onsdag den 19. april.. Her fik vi diskuteret afsnit 10.3 og det meste af 10.4 fra Gerd Grubbs noter om ubegrænsede operatorer.

Desuden havde vi en indledende snak om spektret $\sigma(T)$ og resolventmængden $\rho(T)$ for en operator $T \in \mathbb{B}(H)$. Horia vil gennemgå spektralteori for kompakte operatorer for jer i kurset, og vi vil senere komme til spektralteorien for operatorer i $\mathbb{B}(H)$. En generel indføring i emnet findes i kapitel 7 af mine noter (som man kan orientere sig i allerede nu).

8. gang, torsdag den 4. maj klokken 12.30. Vi diskuterer her evt. resterende uklarheder i Gerd Grubbs kapitel 10.4 og fortsætter med kapitel 10.5; regn i den forbindelse opgave 10.23.

Afsnit 10.5 er af stor betydning for studiet af Schrödinger operatorer $Tu = -\Delta u + V(x)u$, idet det for kvantemekanikken er alfa og omega at give mening til den slags som *selvadjungerede* operatorer i f.eks. $H = L^2(\mathbb{R}^3)$. (Til at begynde med er de kun tæt definerede og symmetriske, dvs. $T \subset T^*$; jvf. lemma 10.8 2°.)

Til almen træning i kapitel 10 forventes I at regne 10.3+4+5. Desuden opgave 10.12, som giver typiske fænomener blot for simple differentialoperatorer. Endelig opgave 10.16, som ofte er nyttig når Hilbertrum anvendes.

Desuden kan I regne opgaverne 10.(35+)36+37 for at belyse Lax–Milgrams lemma. Vi vil også tale om 10.25.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

9. gang, onsdag den 10. maj, kl. 12.30. Her vil vi se på inklusionerne $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, hvor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ og $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ betegner Schwartzrummet og dets dualrum. Hovedsigtet er at forklare, hvorfor (og hvordan) alle elementer af $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ kan Fouriertransformeres og sågar *differentieres*.

En forklaring kan bekvemt gives vha. de generelle resultater, vi tidligere har set. F.eks. ved at I gør følgende (det meste er ret ligetil):

(1) Vis at når $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ defineres som i kapitel 8 af noterne til integrationsteorien, så har $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en familie af *seminormer* givet ved

$$p_N(\psi) = \sup\{ (1+|x|^2)^N |D^\alpha \psi(x)| \bigm| x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \le N \}. \tag{4}$$

Slut via [2.4.2, GKP] at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ herved er et *lokalkonvekst topologisk vektorrum*.

(2) Vis at $p_1 \le p_2 \le \dots$ og at 0 i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ derfor har en *tællelig* omegnsbasis givet ved mængderne

$$V_{N,k} = \{ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \bigm| p_N(\psi) \le \tfrac{1}{k} \}. \tag{5}$$

Repeter at følgekonvergens er tilstrækkeligt, og at $\psi_j \to \psi$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ for $j \to \infty$ hvis og kun hvis, for hvert N, $p_N(\psi_j - \psi) \to 0$ for $j \to \infty$.

(3) Vis at der på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er givet en *metrik* ved

$$d(\psi, \varphi) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \min(1, p_N(\psi - \varphi)). \tag{6}$$

Bevis at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er *metriserbart* (d giver samme topologi som seminormerne p_N, $N \in \mathbb{N}$).

(4) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er fuldstændigt: Hvis (ψ_j) er en Cauchyfølge, så konvergerer alle afledte $D^\alpha \psi_j$ ligeligt på enhver kompakt delmængde $K \subset \mathbb{R}^n$ mod en funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Og for $|\alpha| \le N$,

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^N |D^\alpha \psi(x)| &\le \limsup_j p_N(\psi_j) \\ &\le \limsup_j p_N(\psi_j - \psi_{j_0}) + p_N(\psi_{j_0}) < \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

(5) Slut at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er et *Frechétrum*.

Iht. definitionen er et topologisk vektorrum X et Frechétrum, hvis det er lokalkonvekst og metriserbart med en translationsinvariant metrik (dvs. $d(x,y) = d(x+a, y+a)$ for alle a, x, y), samt fuldstændigt.

(6) Vis at enhver differential operator $D^\alpha\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er *kontinuert*. Vis også at Fourier transformationen $\mathcal{F}$ er en *homeomorfi* af $\mathcal{S}$ på sig selv.

Videre har man om funktionalerne på det topologiske vektorrum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

(1) En linearform $\Lambda\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ er kontinuert fra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ til $\mathbb{C}$ hvis og kun hvis der eksisterer $c>0$ og $N\in\mathbb{N}$ så

$$|\Lambda(\psi)|\le cp_N(\psi)=c\sup\{\,(1+|x|^2)^N|D^\alpha\psi(x)|\mid x\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|\le N\,\}. \tag{8}$$

Dualrummet $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ udgøres af alle kontinuerte lineære funktionaler, og det er et topologisk vektorrum med w*-topologien. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ kaldes rummet af *tempererede distributioner* på $\mathbb{R}^n$.

(2) Hvis $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ for $1\le p\le\infty$ opnås et element Λ_f i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ved forskriften

$$\langle\,\Lambda_f,\,\psi\,\rangle=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)\,dx. \tag{9}$$

Vis dette, og slut at $L_p(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ er et underrum for alle $1\le p\le\infty$.

(3) Specielt er $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et underrum af $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, som endda er *tæt* ! (Dette ses fra [2.4.10, GKP] for $X=\mathcal{S}$ og $Z=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{\bar{}}$— overvej! (Forudsætningen i 2.4.10 om at X er et normeret rum bliver intetsteds brugt i beviset.)

Nu har enhver kontinuert lineær afbildning $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en adjungeret $T^*\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, som for alle $\psi\in(\mathcal{S})$, $u\in\mathcal{S}'$ opfylder

$$\langle\,T^*u,\,\psi\,\rangle=\langle\,u,\,T\psi\,\rangle. \tag{10}$$

Dette fremgår af at højresiden klart afhænger lineært og kontinuert af ψ, så det netop definerer et vist element (kaldet T^*u) af dualrummet.

(1) Vis at T^* er kontinuert $\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$, idet $\mathcal{S}'$ udstyres med w*-topologien.

(2) Vis at der er kontinuerte operatorer $\mathcal{F}^*$ og $D^{\alpha *}$ på $\mathcal{S}'$.

(3) Parsevals ligning giver for alle $\psi,\varphi\in\mathcal{S}$,

$$\langle\,\mathcal{F}\varphi,\,\psi\,\rangle=\int\mathcal{F}\varphi\psi\,dx=\int\varphi\mathcal{F}\psi\,dx=\langle\,\varphi,\,\mathcal{F}\psi\,\rangle. \tag{11}$$

Slut heraf at $\mathcal{F}^*$ i underrummet $\mathcal{S}$ virker som $\mathcal{F}$ selv, så vi herved har en udvidelse af $\mathcal{F}$ til en afbildning $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$, som er kontinuert !

Faktisk er $\mathcal{F}$ en homeomorfi på $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ med $\mathcal{F}^{-1}=(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.

(4) Ved gentagen delvis integration ses for $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$ at

$$\langle\,D^{\alpha *}\varphi,\,\psi\,\rangle=\langle\,\varphi,\,D^\alpha\psi\,\rangle=\int\varphi D^\alpha\psi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int D^\alpha\varphi\psi\,dx=\langle\,D^\alpha\varphi,\,\psi\,\rangle. \tag{12}$$

Dette viser at $D^{\alpha *}=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ i det tætte underrum $\mathcal{S}$, så man har at D^α (via $(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha *}$) udvider til en kontinuert operator $D^\alpha\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$!

Til illustration har man f.eks. Dirac målet δ_0 som er afbildningen $\psi \mapsto \psi(0)$. Dvs. $\langle\, \delta_0,\, \psi\,\rangle = \psi(0)$. (Vis at δ_0 er i $\mathcal{S}'$, idet kontinuiteten fås af ovenstående.)

Fouriertransformering af δ_0 foregår således: For vilkårligt $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ er

$$\langle\, \mathcal{F}\delta_0,\, \psi\,\rangle = \langle\, \delta_0,\, \mathcal{F}\psi\,\rangle = \int e^{-\,\mathrm{i}\,x\cdot\xi}\psi(x)\,dx\,\Big|_{\xi=0} = \int \psi\,dx = \langle\, 1,\, \psi\,\rangle. \tag{13}$$

Altså er $\mathcal{F}\delta_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$. NB! Der er altså ingen vanskelige konvergensspørgsmål for integraler ved udregingen af $\mathcal{F}\delta_0$ — ej heller ved $\mathcal{F}1_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}^2\delta_0 = (2\pi)^n\delta_0$!

Differentiation af δ_0 foregår analogt ved transponering,

$$\langle\, D^\alpha\delta_0,\, \psi\,\rangle = \langle\, \delta_0,\, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\psi\,\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\psi(0). \tag{14}$$

Altså er $D^\alpha\delta_0$ selve *afbildningen* $\psi \mapsto (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\psi(0)$ — som altså er veldefineret, trods det at δ_0 bestemt ikke er nogen differentiabel funktion. (For $|\alpha| = 1$ modelleres en elektrisk dipol ved $D_j\delta_0$.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Ovenstående er kun en forsmag på den såkaldte *distributionsteori*. Denne er meget omfattende og generel (og udgør et helt uundværligt værktøj i moderne matematisk analyse), men ovenstående giver alligevel indblik i de helt centrale teknikker og eksempler. Til yderligere studium af distributionsteorien kan anbefales noterne fra Gerd Grubbs websted, eller bind I af Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer 1983.

Oversigt nr. 6

Eksamensspørgsmål. Projekteksamen d. 19. juni er mundtlig med omkring en halv times eksamination i et af de emner, der er nævnt nedenfor.

(1) Hilbertrum — basis, projektionssætningen, lineære funktionaler.

(2) Banachrum og Hahn–Banachs separationssætning.

(3) Åben afbildningsætningen.

(4) Operatorer med lukket graf.

(5) Svag*-topologier og deres egenskaber.

(6) Spektrum for en begrænset operator på et Hilbertrum;

(7) Kompakte operatorer på Hilbertrum og deres funktionskalkyle.

(8) Spektralsætningen for kompakte operatorer.

(9) Operatorer defineret ved sequilinearformer.

Bemærk at det er en del af jeres opgave at afgrænse de brede eksamensspørgsmål.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen