Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[BM] Mål- og integralteori, af Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Den kan nok købes på KU, men kan også tilgås via nettet:

`http://www.math.ku.dk/uddannelser/noter/`

Jeg regner med at vi gennemgår det meste af bogen, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold. Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, nemlig integrationsteorien.

Det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen af Lebesgues integralbegreb at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette både naturligt og bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke nødvendigvis en delmængde af hverken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$).

På den anden side er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i 'praksis'.

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebesgues integralbegreb, som I altså nu skal møde. Men mere om anvendelserne senere.

En tentativ lektionsplan findes på næste side.

Første gang, onsdag den 4. marts. Vi mødes kl. 8.15 i aud. G5–109 og drøfter organiseringen af kurset.

Dernæst vil jeg efter en introduktion gennemgå kapitel 0+1 og det meste af kapitel 3 i [BM]. Endelig får I tid til at regne opgaver i emnerne:

summer: Regn opgaverne 0.5-0.10. (Vigtige!)

σ-algebra: Prøv at gennemskue opgave 1.1.

Mål: Regn opgave 3.3 (nem).

(Næste gang ser vi på flere fra kapitel 1 og 3.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

(Nedenstående datoer og emner er opdaterede pér 6. marts.)

Uge	Dato	Seance	Emner
10	4/3	1	kapitel 0+1+3: Den udvidede reelle akse; summer.
			Målelige mængder; σ-algebra. Mål. "Næsten overalt".
	6/3	2	kapitel 2: Borel funktioner. Målelige afbildninger.
11	11/3	3	kapitel 4: Integral af positive målelige funktioner.
	13/3	4	kapitel 4: Integral af reelle og komplekse funktioner.
12	18/3	5	kapitel 4: Majorantsætningen. Afledte målrum.
			Integral med reel parameter.
	20/3		Selvstudium (afledte målrum).
13	25/3	6	kapitel 5: Lebeguemålets entydighed. Lokal integrabilitet.
			Radonmål.
	27/3	7	kapitel 5: Invarians. Målforhold. Transformationssætningen.
			Cantors mængde.
15	8/4	8	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
	10/4		Selvstudium (anvendelser af Fubinis sætning: kapitel 6.4).
16	15/4	9	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
	17/4	10	kapitel 7: Tæthed af $C_c(\mathbb{R}^k)$ for $1 \le p < \infty$.
17	22/4		Selvstudium (L_∞).
	24/4	11	kapitel 8: Fouriertransformationen og Schwartzrummet,
18	29/4	12	kapitel 8: Foldning på $\mathbb{R}^k$. Plancherels sætning.

Ændringer kan forekomme undervejs.

Som supplerende litteratur kan jeg især pege på:

K. B. Athreya, S. N. Lahiri: *Measure theory and probability theory*. Springer 2006.

I denne bog er fremstillingen i sit udgangspunkt relativt tæt på tankegangen hos [BM].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

I dag fik vi gennemgået det vigtigste af kapitel 0 og kapitel 3 samt det indledende om begrebet σ-algebra fra kapitel 2.

Lad mig fremhæve notationen $\mathbb{I}_k$ for systemet af alle standardintervaller i $\mathbb{R}^k$; disse er rektangler som i den j'te retning består af et halvåbent interval $]a_j, b_j]$. På fredag skal vi blandt andet se

- Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  NB ! $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$; omvendt siges $\mathbb{D}$ at være et *frembringersystem* for denne algebra.
- $\mathbb{B}_k = \sigma(\mathbb{I}_k)$ (de facto udledt i teksten side 21 øverst).
- Lemma: *Hvis $\mathbb{E}_i$ er en σ-algebra i en mængde X for hvert $i \in I$, da er også $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ en σ-algebra i X.*

Lemmaet om fællesmængden fremgår undervejs (i en anden notation) i beviset for sætning 1.2, som vi skal se.

2. gang, fredag den 6. marts. Vi gennemgår resten af kapitel 1 om Borel-algebraen. Desuden kapitel 2 om målelige afbildninger.

Regn opgaver om:

σ-algebraer 1.4, og generaliser ved at lave 1.5 (evt. blot for $n = 2$).

Mål: Vis at aksiomerne for mål har "indbygget" den naturlige svækkelse i opgave 3.10. (Mængderne skal blot være parvis disjunkte *μ-næsten overalt*.)

Fortsæt med 3.4 og 3.7.

Frembringersystemer: 1.2, 1.3.

PS: I opgave 1.5 inducerer $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ en klassedeling $X = \bigcup_i K_i$ (dvs. disjunkt forening) med højst 2^n mængder. Dette ses induktivt med $n = 1$ klaret i opgave 1.4; en ny mængde A_{n+1} og dens komplementærmængde $X \setminus A_{n+1}$ giver jo anledning til (højst) dobbelt så mange snitmængder. Herved gælder også for hvert j og i at enten er $K_i \subset A_j$ eller $K_i \subset X \setminus A_j$.

Hvis $\mathbb{F}$ betegner samtlige foreningsmængder af de højst 2^n mængder i (K_i), så giver simpel kombinatorik at $\mathbb{F}$ højst har 2^{2^n} elementer. Nu er $\mathbb{F}$ født stabil under foreningsmængder, men er en σ-algebra fordi $X \setminus \bigcup_{i\in I_0} K_i = \bigcup_{i\notin I_0} K_i \in \mathbb{F}$. Idet $A_j = \bigcup\{K_i \mid A_j \cap K_i \neq \emptyset\} \in \mathbb{F}$ for hvert j, så er $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{F}$, hvorfor $\sigma(\mathbb{A})$ højst har 2^{2^n} elementer. QED

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Se PS på foregående side.

I dag fik vi gennemgået resten af kapitel 3 om begrebet mål (pånær Eks. C). Dog er emnet "næsten overalt" bedst egnet til selvstudium: Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet *nulmængder* til for at holde regnskab med at ting "går galt" i kun "ubetydelige" mængder.

I afsnit 2.1 fik vi gennemgået det meste; læs selv om funktioner med komplekse værdier. (Groft sagt bruger man blot det reelle tilfælde på real- og imaginærdelene hver for sig; fsa. måleligheden er dette tilladeligt pga. sætning 2.2 med $k = 2$.)

3. gang, onsdag den 11. marts. Fra 8.15 gennemgås det vigtigste fra kapitel 2.2–2.4. Desuden tager vi hul på kapitel 4.1 om Lebesgues integralbegreb.

Opgaverne vedrører mange forskellige emner:

Borelalgebraer: 1.7, 1.8

Målelighed: Afklar hvorvidt polynomier $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\exp$ samt $\sin$ er *målelige*, dvs. Borel-funktioner. Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin konvergenscirkel, målelig ?

Dernæst regnes 2.3 (nem).

Den udvidede akse $\overline{\mathbb{R}}$: Regn opgave 1.6.

Vink: Det kan være nyttigt at metrikken

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \tag{2}$$

giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Indikatorfunktioner: Lav 2.1 (brug sætning 2.3!).

Aksiomerne for mål: belyses via opgave 3.8.

Næsten overalt: Regn 3.13.

Koncentrerede mål: Gennemsku 3.14.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi fik idag gennemgået resten af kapitel 2, og vi har dermed gjort til og med kapitel 3 færdigt.

Vi fik også nævnt sætning 4.1 og givet hovedtrækkene i konstruktionen og beviset. Tænk selv over detaljerne.

Hjemmeforberedelse: Gennnemsku bogens påstand side 4.1 at $f + g$ og cf er $\mathbb{E}$-målelige for alle f, $g \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$. Overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$ fire linier under formel (iv) side 4.3. (Eksempel 2.15 er et af de mulige hjælpemidler.)

4. gang, fredag den 13. marts. Her vil vi udlede eksistensen af et integral $\int_X f \, d\mu$ for enhver positiv $\mathbb{E}$-målelig funktion f. Vi stiler mod at gennemgå Lebesgue's monotonisætning med bevis og anvendelser, gerne til og med side 4.8 (el. 52).

Desuden er der opgaver i:

faldgruber: Gennemsku opgave 2.5 (nem).

målelighed: Begynd med opgave 2.2. (Ideerne indgår i de formelle definitioner af uafhængige stokastiske variable og betinget middelværdi.)

Dernæst opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Man kan søge inspiration i eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

frembringersystemer: Eftervis de vigtige resultater i opgave 2.7 (jvf. opgaven om at en holomorf funktion er Borel på dens konvergenscirkel(-skive)).

Er sidste del af opgave 1.6 en følge heraf ?

næsten overalt: opgave 3.12.

fuldstændighed af mål: Lær om dette begreb i opgave 3.15.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Idag nåede vi til og med Lebesgues monotonisætning og sætning 4.2 om at ombytte sum og integral.

5. gang, onsdag den 18. marts. Her vil målet være at nå igennem kapitel 4.2 og 4.3 samt 4.7, jævnfør lektionsplanen. (4.4–4.6 er emnet den 20. marts.)

Dernæst laver vi opgaver i

faldgruber: Opgave 4.3.

monotonisætningen: Regn 4.4. (*Vink:* Læs integration af f over $]1,n]$ som integration af $f1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

almen træning: 4.6–9.

modeksempler: Lav opgave 4.12 (nem!).

fuldstændighed af mål: Regn 3.16.

Regn gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

1. selvstudium, fredag den 20. marts. Her er programmet at I selv studerer de velbeskrevne afsnit 4.4, 4.5 i [BM] om afledte målrum: delrum, tætheder, billedmål. Prøv i hvert afsnit at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Desuden afsnit 4.6 om uendelige summer (fra kap. 0) fortolket som integraler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Sidste gang fik vi gennemgået Lebesgues majorantsætning med bevis.

6. gang, onsdag den 25. marts. Vi gennemgår først 4.7 om integral som funktion af parameter. Dernæst lægges hovedvægten på afsnit 5.1 om entydighedssætingen for mål. Vi går videre med Radonmål og når antageligt frem til side 88. (Hovedsætning 5.12 er flot, men vi har ikke tid til at studere den nærmere.)

Integration af rækker: Lav 4.8 og 4.9 (ej svære).

Integral med parameter: Regn opgave 4.41.

Integrabilitet: Gennemsku 4.14! Lav 4.22 (nyttig!).

Majorantsætningen: Regn 4.19 (illustrerer forudsætningerne) og fortsæt med 4.23.

Integration over delmængder: Regn 4.28+29.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Vi fik idag gennemgået entydighedssætningen for mål i kapitel 5.1, og defineret lokal integrabilitet samt nævnt analysens hovedsætning under svagere forudsætninger i kapitel 5.2. I bedes selv nærstudere beviset for denne: Med diverse omskrivninger får man reduceret spørgsmålene til anvendelse af enten majorantsætningen eller nederste ulighed side 84.

Som forberedelse til næste gang bedes I repetere begrebet billedmål. Regn derfor gerne opgave 4.35 (nem).

7. gang, fredag den 27. marts. Vi fortsætter her med at se Lebesguemålet som et eksempel på Borel- og Radonmål, jvf. 5.3. Desuden fortsætter vi med 5.4 om invarians, 5.5 om målforhold, der er det linære specialtilfælde af Jacobis generelle transformationssætning i 5.7 (u. bevis), og så meget om eksemplerne fra 5.6 som vi kan nå.

For at øve tingene regnes opgaver i

Anvendelse: 4.42 om gammafunktionen, en 'glat' udgave af $n!$.

Vink: Man kan dele op i 2 integraler ved at indskyde $t = 1$.

σ-klasser: Regn 5.6(nem) og 5.7.

Lokalt integrable funktioner: Lav både 5.8 og 5.9 (begge bruges ofte).

Lebesguemålets eksistens (følgeton): Begynd med opgave 5.1+2.

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Sidste gang nåede vi til sætning 5.18 pånær beviset (kun definitionen af Borel- og Radonmål blev nævnt fra 5.3).

Jacobis transformationsformel i afsnit 5.7 har vi bevist for *lineære* transformationer ved hjælp af målforholdet og sætning 5.18. Et alment bevis baseret på de gennemgåede dele af teorien findes i afsnit 5.3 af D. W. Stroock: *A concise introduction to the theory of integration* (Birkhäuser 1999).

Vi tager afsnit 5.8 om Lebesgue-målelighed kursorisk; afsnittet bør i hvert fald læses af folk med interesser i matematisk analyse.

Afsnit 5.9 bliver også kursorisk, omend det (heller) ikke er uvæsentligt. Blandt andet godtgør overførslen af Lebesguemålet til et vilkårligt euklidisk rum (som jo kunne være $\mathbb{R}^k$ med en anden ortonormal basis end den kanoniske) at Lebesguemålet m_k i $\mathbb{R}^k$ *ikke* er knyttet til koordinatakserne, som man måske kunne tro fordi v_k er det.

Ifm. sætning 5.17 gives her et bekvemt argument for at

> *enhver* isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda af formen
> $T(x) = Ox+a$ for $a \in \mathbb{R}^k$ og en ortogonal matrix O (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

Pér definition opfylder en isometri T at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$, for $T - T(0)$ er også en isometri, så det rækker at vise den har formen Ox. For $y = 0$ ses så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\,x \,|\, x\,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\,x \,|\, y\,) \tag{4}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$ og y med $T(y)$, uden at ændre værdierne, sluttes heraf at T er skalarproduktbevarende:

$$(\,T(x) \,|\, T(y)\,) = (\,x \,|\, y\,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

For den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ fås så $(\,T(e_j) \,|\, T(e_k)\,) = \delta_{jk}$, hvorfor $\mathbb{R}^k$ også har $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ som ortonormal basis. Så er $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ for visse tal $\lambda_j(x)$, som via indre produkt med $T(e_k)$ ses at være $\lambda_k(x) = (\,T(x) \,|\, T(e_k)\,)$. Substitution heraf viser derfor at

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\,T(x) \,|\, T(e_j)\,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\,x \,|\, e_j\,) T(e_j). \tag{6}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, hvoraf $T(x) = Ox$ for en $n \times n$-matrix O. Nu medfører (5) at $O^{\mathrm{t}} O x = x$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

8. gang, onsdag den 8. april. Vi færdiggør 5.5 om målforhold; dernæst nogle hovedeksempler fra 5.6, især Cantors mængde. Dernæst tager vi hul på kapitel 6, hvor vi først skal diskutere emnet *produktmål*.

Til dagens øvelser beskæftiger vi os med følgende emner:

Lokal integrabilitet: Lav 5.13 (nem) og så 5.9+10 (bruges ofte).

For hvilke $a > 0$ er funktionen $\frac{1}{x(\log x)^a}$ (hvor $x > 2$) integrabel i ∞ ?

Vink: En stamfunktion kan opskrives ! (NB. $a = 1$ er et særtilfælde.)

Invarians: Gennemsku 5.22 !

Modeksempler: Regn 5.14.

Målforhold: Som opvarmning regnes 5.23. *Vink:* kugler er rotationsinvariante !

Følgeton om Lebesguemålet: Begynd på 5.3. *Vink:* Punkt (iii) kan eftervises ved at indsætte $E \cup F$ i formlen for $\alpha(A)$ og bruge formlen igen på leddet $\alpha(A \cap (E \cup F))$.

2. selvstudium, fredag den 10. april. Her er programmet at I selv studerer side 133 og afsnit 6.4 (undtagen eks. 6.19) i [BM] om anvendelser af både produktmålet (konstruktionen) og Tonellis og Fubinis sætninger fra afsnit 6.3. Disse kræver nok en nærlæsning hjemmerefra fsa. indholdet.

Prøv i hvert af eksemplerne 6.13–15 og 6.16–18 at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Er eksempel 6.15 relevant for Φ øverst side 135 ?

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Vi gennemførte sidste gang beviset for entydigheden af produktmålet. Desuden fik vi løseligt formuleret Tonellis og Fubinis sætninger.

9. gang, onsdag den 15. april. Vi gennemgår resten af kapitel 6 om eksistensen af *produktmål* til og med bevis for Tonellis og Fubinis sætninger. Dernæst kapitel 7.1–7.3 om funktionsrummene $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ for $1 \leq p < \infty$ og Hölders og Minkowskis uligheder.

NB! Dette er en stor mundfuld, så I opfordres til at orientere jer på siderne 123–133 og 149–159 inden forelæsningen !

Blandt opgaverne ser vi på:

Transformationssætningen 5.26: Regn 5.24.

Cantor–Lebesgues funktion: Regn 5.28. (Det vigtigste er at gennemskue trialbrøksudviklingen.)

Tonelli: 6.14 (om areal mv.) og 6.19 (om nødvendigheden af σ-endelighed).

Produkt-σ-algebraer: Lav 6.2(let) og 6.3.

Følgeton om Lebesguemålet: Regn resten af 5.3 (Den tællelige forening er hovedpunktet, resten kan fås deraf!) og begynd på 5.4 (ikke så svær som 5.3, desuden skulle I nu kunne ane, hvordan eksistensen opnås).

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

10. gang, fredag den 17. april. Vi går videre med funktionsrum i kapitel 7.3 fra side 152.

Desuden er der opgaver i:

Volumen: 6.26.

Tonelli/Fubini: Lav 6.22 og 6.23.

Delvis integration: Eftervis følgende:

Hvis $f, g \in \mathcal{L}([a,b])$, så gælder om vilkårlige stamfunktioner $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ og $G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \qquad (7)$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x, y) hvor $a \leq x \leq b$ og $a \leq y \leq x$. (**Tegn trekanten !** og brug indikatorfunktionen for denne.)

Produktmål: Regn 6.28 (brug π_1, π_2 side 123)—og bemærk, at vi derved får ført sætning 6.9 over til *delmængder* af $\mathbb{R}^k$.

Følgeton om Lebesguemålet: Regn resten af 5.4+5.5 (overkommeligt nu).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Idag nåede vi til og med Fischers fuldstændighedssætning i kapitel 7.4. Læs selv de to efterfølgende korollarer, om at konvergens i p-middel medfører punktvis konvergens af en *delfølge*.

3. selvstudium, onsdag den 22. april. Her kommer der to emner: For det første det tidligere annoncerede om Lebesguerummet L_∞, hvor det foruden fuldstændigheden også er vigtigt at få styr på, at konvergens af funktionsfølger i dette rum er det samme som punktvis konvergens næsten overalt.

For det andet kan vi ikke undvære resultaterne fra afsnit 7.6, så dette må I også studere selv. Som udgangspunkt kan I lære om tæthed ved at studere sætning 7.27 med bevis.

Vær forberedt på at beviset for sætning 7.28 er lidt krævende, både begrebsmæssigt (Hvad er tæthed ?) og teknisk. I vil få brug for at vide, at afstanden fra en lukket mængde F til x, dvs.

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}$$

er en kontinuert funktion af x. (Klassisk øvelse om metriske rum, kan evt. tages for givet.)

Som sagt modtager jeg gerne spørgsmål til emnerne, foruden onsdag er jeg forventeligt også på kontoret tirsdag.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

11. gang, fredag den 24. april. Her gennemgår vi kapitel 8.1–2 i hovedtræk. Emnet er Fourier transformationen, hvor man med stor fordel kan benytte Lebesgue-integralet.

Om L_p: Regn opg. 7.16. Forsæt med 7.12 og 7.15 (brug Hölders ulighed.)

Om L_∞: Lav 7.20 for at se en anden begrundelse for eksponenten ∞.

Duale eksponenter: begrebet illustreres gennem opgave 7.10.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

12. gang, onsdag den 29. april. Her gennemgås resten af kapitel 8.2 (fra og med inversionsformlen i sætning 8.8) og så hovedtræk af 8.3–8.4 om foldning og den moderne Fourierteori—integrationsteoriens hovedanvendelse.

En væsentlig trykfejl findes i formellinien lige under midten side 193, hvor $g1_{K_N}$ skal erstattes af $g1_{K_N}f$ begge steder.

Emnerne til opgaverne er :

Fouriertransformationen: Regn 8.1 og 8.2.

Leibniz' regel: Lav 8.3.

Gauss-klokkens invarians: Regn 8.4 ved at bruge løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden.

Supplerende egenskaber: Lav 8.10, f.eks. ved at bruge majorantsætningen.

NB ! Husk vi har eksamen tirsdag den 9. juni !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

Pensum og eksamen.

Pensum er det gennemgåede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen "Mål- og integralteori". Dog er afsnittene 5.3, 5.8–9, 6.5, side 186 og appendikset samt beviserne i 8.4 kursoriske.

Til den mundtlige eksamen den 9. juni kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(2) Entydighedssætningen for mål.

(3) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(4) Produktmål.

(5) Tonellis og Fubinis sætninger.

(6) Hölders og Minkowskis uligheder.

(7) Lebesguerummene L_p og deres fuldstændighed.

(8) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(9) Foldning.

(10) Parsevals ligning.

Man forventes selv at tale ca. 20 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen