Eksamen - Algebra 1

Tirsdag den 7. januar, 2014, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.
Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.
Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes i besvarelsen.

Opgave 1 (15%)

Lad $\sigma = (1\ 8)(6\ 9)(1\ 7\ 8\ 6)(3\ 10)(2\ 5\ 3) \in S_{10}$.

1. Skriv σ som produkt af disjunkte cykler.
2. Bestem ordenen af σ.
3. Bestem fortegnet af σ.

Opgave 2 (12%)

1. Udregn følgende udtryk i $\mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$, hvis det giver mening:
$$[11] \cdot ([9] \cdot [7] + [5])^{-1}.$$
2. Bestem ordenen af gruppen $(\mathbb{Z}/53\mathbb{Z})^*$.

Opgave 3 (12%)

1. Bestem elementerne i $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$.
2. Vis at grupperne $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ og $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ er isomorfe.

Opgave 4 (12%)

Lad $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in S_5$ og lad $G = \langle \sigma \rangle$ være undergruppen af S_5 frembragt af σ.

1. Skriv hvert element i G som produkt af disjunkte cykler.
2. Bestem cykelindexet $\zeta_G(x_1, \dots, x_5)$ af G.

Opgave 5 (14%)

1. Lad G være en abelsk gruppe og lad H være mængden af elementer i G, der har orden 1 eller 2. Vis at H er en undergruppe af G.

2. Vis at der findes en gruppe G, som opfylder at mængden af alle elementer i G, der har orden 1 eller 2, *ikke* er en undergruppe af G.

Opgave 6 (35%)

Lad p være et primtal og lad $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ være legemet med p elementer. Lad G_p være mængden af matricer på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hvor $a, b \in \mathbb{F}_p$, $a \neq 0$. (Vi benytter her 0 og 1 som en kort betegnelse for henholdsvis $[0]_p$ og $[1]_p$).

1. Bestem den inverse til $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Vis at G_p er en undergruppe af $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

3. Bestem ordenen af G_p.

4. Bestem centeret $Z(G_p)$.

5. Lad H være mængden af matricer på formen $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hvor $b \in \mathbb{F}_p$. Vis at H er en *normal* undergruppe af G_p.

Da $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + b \\ 1 \end{bmatrix}$, lader vi $g \cdot x = ax + b$, hvor $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p$ og $x \in \mathbb{F}_p$.

6. Vis at dette definerer en virkning af gruppen G_p på mængden $S = \mathbb{F}_p$.

7. Bestem stabilisatoren $(G_p)_1$ af $1 \in \mathbb{F}_p$.