Eksamen - Algebra 1

Fredag den 28. februar, 2014, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.
Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.
Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes i besvarelsen.

Opgave 1 (22%)

Lad $\sigma = (1\ \ 5\ \ 8\ \ 12\ \ 11\ \ 7)(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 8\ \ 5)(3\ \ 10\ \ 4\ \ 9\ \ 6)$ være en permutation i S_{12}.

1. Skriv σ som produkt af disjunkte cykler.
2. Bestem ordenen af σ.
3. Bestem fortegnet af σ.
4. Bestem mængden I_σ af inversioner af σ.

Opgave 2 (18%)

Udregn hver af følgende udtryk i $\mathbb{Z}/108\mathbb{Z}$ eller forklar hvorfor udtrykket ikke giver mening.

- $[11] \cdot ([9] + [7] \cdot [18])^{-1}$
- $[15] \cdot ([2] + [8] \cdot [17])^{-1}$

Opgave 3 (15%)

Vis at grupperne $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ og $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ er isomorfe.

Opgave 4 (25%)

Lad $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ være legemet med 2 elementer og lad $GF(3, \mathbb{F}_2)$ være gruppen af alle invertible 3×3 matricer med indgange fra $\mathbb{F}_2$. (I denne opgave vil x være en kort notation for det element i $\mathbb{F}_2$ som vi normalt skriver som $[x]$ eller $[x]_2$.)

1. Vis at $G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \}$ er en undergruppe af $GL(3, \mathbb{F}_2)$.
2. Bestem ordenen af G.
3. Bestem ordenen af ethvert element i G.
4. Lad $N = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_2 \}$. Vis at N er en normal undergruppe af G.

Opgave 5 (20%)

Lad $\sigma = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 6) \in S_6$ være en permutation.

- Bestem permutationsmatricen P_σ.
- Lad $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Find en permutation $\pi \in S_6$ som opfylder at $\sigma_1 = \pi\sigma\pi^{-1}$ eller forklar hvorfor der ikke findes en sådan permutation.
- Lad $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find en permutation $\tau \in S_6$ som opfylder at $\sigma_2 = \tau\sigma\tau^{-1}$ eller forklar hvorfor der ikke findes en sådan permutation.