Prøve-Eksamen - Algebra 1

Xyzdag den 38. december, 2013, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.
Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.
Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes i besvarelsen.

Opgave 1 (20%)

Lad $\sigma = (1\ 2)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5\ 6)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ være en permutation.

1. Skriv σ som produkt af disjunkte cykler. $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 6\ 7\ 8\ 5)$
2. Bestem ordenen af σ. 15
3. Bestem fortegnet af σ. $\operatorname{sgn}\sigma = 1$
4. Bestem mængden I_σ af inversioner af σ. $\{(1,3), (2,3), (4,5), (4,8), (6,8), (7,8)\}$

Opgave 2 (18%)

Udregn hver af følgende udtryk i $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$ eller forklar hvorfor udtrykket ikke giver mening.

- $[18] \cdot ([19] + [4] \cdot [5])^{-1}$ Giver ikke mening, da $\gcd(96, 19+4\cdot 5) = 3$
- $[8] \cdot ([9] + [10] \cdot [11])^{-1}$ $[88]$

Opgave 3 (8%)

Lad $G = \mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ være en cyklisk gruppe. Bestem antallet af frembringere for G.

$\varphi(77) = 60$

Opgave 4 (24%)

Lad $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ være legemet med 3 elementer og lad $GF(3, \mathbb{F}_3)$ være gruppen af alle invertible 3×3 matricer med indgange fra $\mathbb{F}_3$. (I denne opgave vil x være en kort notation for det element i $\mathbb{F}_3$ som vi normalt skriver som $[x]$ eller $[x]_3$.)

1. Vis at ethvert element i $GF(3, \mathbb{F}_3)$ på formen $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hvor $a, b, c \in \mathbb{F}_3$ har orden 1 eller 3.

   $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Vis at $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_3 \}$ er en undergruppe af $GL(3, \mathbb{F}_3)$.

   i) Neutralt elem.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ii) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   iii) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+a & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Bestem ordenen af H.

   27

Opgave 5 (30%)

Lad $a = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ og $d = (1\ 3\ 5)(2\ 6\ 4)$ være permutationer i S_6. Lad $G = \{a, b = ad^2, c = ad, d, e, f = d^2\}$. I S_6 har vi den sædvanlige komposition $\circ$ for permutationer.

1. Skriv hvert element i G som produkt af disjunkte cykler.

2. Fremstil en kompositionstavle for $(G, \circ)$ og vis derved at G er lukket under $\circ$. Samme som side 54 i bogen.

3. Hvilken kendt gruppe er isomorf med G. S_3

4. Bestem cykelindexet ζ_G for G. $\frac{1}{6}(x_1^6 + 2x_3^2 + 3x_2^3)$

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af aflevedere ark på 1. side af besvarelsen.

$a = (12)(34)(56)$

$b = (16)(23)(45)$

$c = (14)(25)(36)$

$d = (135)(264)$

$e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

$f = (153)(246)$

Spørgsmål 2 i opgave 5 kræver måske lidt mere regne-arbejde end normalt for en eksamensopgave.