Algebra 1, 7. januar 2014, Facit

Opgave 1

1. $\sigma = (1\ 7)(2\ 5\ 10\ 3)(4)(6\ 8\ 9)$
2. Ordenen af σ: Mindste fælles multiplum af $2, 4, 1, 3$
$= 12$
3. $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 \cdot 1 = 1$

Opgave 2

1. $[9]\cdot[7]+[5] = [15]$

$53 = 3\cdot 15 + 8$ $\qquad 8 = 53 - 3\cdot 15$

$15 = 1\cdot 8 + 7$ $\qquad 7 = 15 - 8 = 15-(53-3\cdot 15) = -53+4\cdot 15$

$8 = 1\cdot 7 + 1$ $\qquad 1 = 8-7 = (53-3\cdot 15)-(-53+4\cdot 15) =$
$2\cdot 53 - 7\cdot 15$

$$[11]\cdot([9]\cdot[7]+[5])^{-1} = [11]\cdot[-7] = [-77] = [29]$$

2. Ordenen af $(\mathbb{Z}/53\mathbb{Z})^*$: $\varphi(53) = 52$,
da 53 er primtal.

Opgave 3

1. $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{[1],[2],[4],[5],[7],[8]\}$
2. Er $[2]$ en frembringer for $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$?
$[2]$, $[2]^2 = [4]$, $[2]^3 = [8]$, $[2]^4 = [16] = [7]$,
$[2]^5 = [2\cdot 7] = [5]$, $[2]^6 = [2\cdot 5] = [1]$
Ja, alle elementer er på formen $[2]^i$.
$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ er en cyklisk gruppe af orden 6 og er derfor isomorf med $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Opgave 4

1.
$$\sigma = (1\,2)(3\,4\,5)$$
$$\sigma^2 = (1)(2)(3\,5\,4)$$
$$\sigma^3 = (1\,2)(3)(4)(5)$$
$$\sigma^4 = (1)(2)(3\,4\,5)$$
$$\sigma^5 = (1\,2)(3\,5\,4)$$
$$\sigma^0 = \sigma^6 = (1)(2)(3)(4)(5)$$

2.
$$\zeta_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{6}\left(x_2x_3 + x_1^2x_3 + x_2x_1^3 + x_1^2x_3 + x_2x_3 + x_1^5\right) =$$
$$\frac{1}{6}\left(x_1^5 + 2x_1^2x_3 + 2x_2x_3 + x_1^3x_2\right)$$

Opgave 5

1. G abelsk, $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$.

H undergruppe:

i) $e \in H$

ii) $x \in H \Rightarrow x^{-1} = x \Rightarrow x^{-1} \in H$

iii) $x, y \in H \Rightarrow (xy)^2 = xyxy = x^2y^2 = e \Rightarrow xy \in H$.

2. G skal være ikke-abelsk. F. eks. den mindste ikke-abelske gruppe, som er S_3.

Opgave 6

1.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. i) neutralt element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p$

ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p \Rightarrow \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p$

iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p$.

3. Orden af G_p: $(p-1)\cdot p$

4. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z(G_p) \iff$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for alle $x, y \in \mathbb{F}_p$, $x \neq 0$

$\iff ay + b = bx + y$ for alle $x, y \in \mathbb{F}_p$, $x \neq 0$

$\iff a = 1, \quad b = 0$

$Z(G_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. H er undergruppe; som spørgsmål 2

Lad $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_p$

$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & cb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

Altså: H er normal undergruppe.

6. i) $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e \cdot x = 1x + 0 = x$, for alle $x \in S$

ii) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vise $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

Enten: udnyt at matrix-multiplikation er associativ på $gh\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

Eller: $(gh) \cdot x = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = acx + ad + b.$

$g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (cx + d) = a(cx + d) + b$

7. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in (G_p)_1 \iff \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = 1 \iff a \cdot 1 + b = 1 \iff$
$b = 1 - a$

$(G_p)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_p,\ a \neq 0 \right\}$