# Normale undergrupper, kvotientgrupper og multiplikativ gruppe af restklasser.

Lad $G$ være en gruppe og lad $N \leq G$.
$N$ siges at være en **normal** undergruppe af $G$ hvis

$$gNg^{-1} = N,$$

for alle $g \in G$ hvor $gNg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in N\}$.

For at vise at en undergruppe $N \leq G$ er en normal undergruppe er det tilstrækkeligt at vise at

$$ghg^{-1} \in N, \text{ for alle } g \in G \text{ og } h \in N.$$

Bemærk at hvis $N \leq H$ og $H \leq G$ så er $N \leq G$, men det er muligt at $N$ er normal undergruppe af $H$ og $H$ er normal undergruppe af $G$, og $N$ er *ikke* normal undergruppe af $G$.

Hvis $N$ er en normal undergruppe af $G$ så kan man definere en komposition på mængden $G/N$ af (venstre-) sideklasser af $N$ ved

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

$G/N$ med denne komposition er en gruppe, kaldet **kvotientgruppen** $G$ modulo $N$,
med neutralt element $eN = N$ og
hvor $aN$ har invers $a^{-1}N$.

**Vigtigt eksempel:**
Hvis $n$ er et ikke-negativt helt tal så er $n\mathbb{Z}$ er normal undergruppe af $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ er en additiv gruppe.

Hvis $n$ er positiv har $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ orden $n$.

Hvis $n = 0$ så er $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ uendelig.

Lad $n$ være et positivt helt tal. På mængden af restklasser $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ defineres multiplikation ved

$$[a] \cdot [b] = [ab].$$

Dette er en veldefineret komposition, som er associativ, kommutativ og har neutralt element [1].

$[a]$ har en multiplikativ invers i $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
hvis og kun hvis
$\gcd(a, n) = 1$.

Vi indfører notation for mængden af invertible elementer

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[a] \mid \gcd(a, n) = 1\}.$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ er en multiplikativ gruppe.