Endelige legemer. Homomorfi og isomorfi.

Lad p være et primtal.
Så er $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ et legeme.
Dette legeme betegnes $\mathbb{F}_p$.

Fra $\mathbb{F}_p$ fås flere grupper, f.eks.:

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, \cdot)$

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, mængden af invertible $n \times n$ matricer over $\mathbb{F}_p$.

Lad G og K være grupper.

En funktion $\phi : G \mapsto K$ siges at være en **homomorfi** hvis

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

for alle $a, b \in G$.
Hvis ϕ er en bijektion så siges ϕ at være en **isomorfi**. G og K er da isomorfe, skrives $G \cong K$.

Eksempel: Lad N være en normal undergruppe af en gruppe G. Så defineres en funktion

$$\phi : G \mapsto G/N, \quad \text{ved} \quad \phi(g) = gN, \quad \text{for alle } g \in G.$$

Denne funktion er en homomorfi og kaldes den **kanoniske homomorfi**.

Proposition 2.4.9:
Lad G og K være grupper og lad $\phi : G \mapsto K$ være en homomorfi.

- $\phi(e) = e$, altså: $\phi(e_G) = e_K$ hvor e_G og e_K er neutrale elementer i henholdsvis G og K.

- $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ for alle $x \in G$.

- $\phi(G)$ er en undergruppe af K, eventuelt $\phi(G) = K$.

- **Kernen** af ϕ: $\ker \phi = \{g \in G \mid \phi(g) = e_K\}$ er en normal undergruppe af G.

- ϕ er injektiv hvis og kun hvis $\ker \phi = \{e_G\}$.