Permutationer, symmetrisk gruppe og cykler.

En permutation af $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ er en bijektiv funktion $\sigma : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Notation: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Komposition (funktionssammensætning):

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

Husk: produktet læses fra højre mod venstre.

Mængden af alle permutation af $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ betegnes S_n.

$(S_n, \circ)$ er en gruppe af orden $n!$.
Den kaldes den symmetriske gruppe.

For $\sigma \in S_n$ sættes $M_\sigma = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$.

Permutationer σ og τ siges at være disjunkte hvis $M_\sigma \cap M_\tau = \emptyset$ og da er $\sigma\tau = \tau\sigma$.

En permutation $\sigma \in S_n$ siges at være en cykel af længde k og skrives $\sigma = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_k)$ hvis

$$\sigma(x) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{hvis } x = x_i \in \{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \\ x_1 & \text{hvis } x = x_k \\ x & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvis $\sigma = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_k)$ så er $M_\sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Cyklerne $\sigma = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_k)$ og $\tau = (y_1\ y_2\ y_3\ \ldots\ y_\ell)$ er altså disjunkte hvis $\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \{y_1, \ldots, y_\ell\} = \emptyset$.
Disjunkte cykler kommuterer.

Proposition. Enhver permutation kan skrives som produkt af disjunkte cykler.

Proposition. Hvis $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_r$ er et produkt af disjunkte cykler hvor σ_i er en cykel af længde k_i så er

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(k_1, k_2, \ldots, k_r),$$

hvor lcm er mindste fælles multiplum.

Hvis

$$A = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}, \quad B = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}, \quad \ldots \quad Z = p_1^{z_1} \cdots p_r^{z_r}$$

hvor $p_1, \ldots, p_r$ er primtal og $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r, \ldots, z_1, \ldots, z_r$ er ikke-negative heltal så er

$$\mathsf{lcm}(A, B, \ldots, Z) = p_1^{\ell_1} \cdots p_r^{\ell_r}$$

hvor $\ell_i = \mathsf{max}\{a_i, b_i, \ldots, z_i\}$.

Hvis primtalsfaktoriseringen ikke er kendt så beregnes

$$\mathsf{lcm}(A, B) = \frac{AB}{\mathsf{gcd}(A, B)}$$

og

$$\mathsf{lcm}(A, B, C) = \mathsf{lcm}(\mathsf{lcm}(A, B), C).$$