Transpositioner og alternerende grupper.

En cykel $(x_1\ x_2)$ af længde 2 kaldes en transposition.
En transposition på formen $(x\ x+1)$ kaldes en simpel transposition.

For en permutation $\sigma \in S_n$ defineres mængden af inversioner

$$I_\sigma = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ og } \ \sigma(i) > \sigma(j)\},$$

og $n(\sigma) = |I_\sigma|$.

Proposition. For $\sigma, (i\ i+1) \in S_n$ er

$$n(\sigma \circ (i\ i+1)) = \begin{cases} n(\sigma)+1 & \text{hvis } \ \sigma(i) < \sigma(i+1), \\ n(\sigma)-1 & \text{hvis } \ \sigma(i) > \sigma(i+1). \end{cases}$$

Fortegnet af σ er $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)}$.

Proposition. $\mathrm{sgn} : S_n \mapsto \{\pm 1\}$ er en homomorfi.

Kernen af sgn kaldes den alternerende gruppe, skrives A_n.

En cykel $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$ er indeholdt i A_n hvis og kun hvis k er ulige.

Et produkt af disjunkte cykler er indeholdt A_n hvis og kun hvis der er et lige antal cykler af lige længde.