Gruppevirkninger.

Lad G være en gruppe og lad S være en mængde.

Vi siger G **virker på** S hvis der findes en funktion $\alpha : G \times S \to S$ som opfylder $\alpha(e, s) = s$ og $\alpha(gh, s) = \alpha(g, \alpha(h, s))$, for alle $s \in S$ og $g, h \in G$.

Idet vi skriver $\alpha(g, s) = g \cdot s$, er betingelserne

1. $e \cdot s = s$ for alle $s \in S$ og

2. $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$.

For et fast $g \in G$ definér $\alpha_g : S \to S$ ved $\alpha_g(s) = g \cdot s$.
Så er α_g en bijektion.
Hvis S er endelig så er α_g altså en permutation.

G virker S betyder altså: for ethvert $g \in G$ findes en bijektion α_g på S som opfylder

1. $\alpha_e(s) = s$ for alle $s \in S$ og

2. $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$.

Det er muligt at α_g og α_h er samme funktion hvis $g \neq h$.

Hvis $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ så $\phi : G \to S_n$ som er givet ved $\phi(g) = \alpha_g$ en homomorfi.

Lad $N = \ker\phi$. Så er $\alpha_g = \alpha_h$ hvis og kun hvis g og h ligger i samme sideklasse af N.

Definition. Lad G virke på S.

- For $s \in S$ defineres banen gennem s som $G \cdot s = \{gs \mid g \in G\}$.

- Mængden af (forskellige) baner betegnes S/G.

- For $X \subseteq S$ defineres stabilisatoren af X som
  $G_X = \{g \in G \mid g \cdot X = X\}$,
  hvor $g \cdot X = \{g \cdot x \mid x \in X\}$.
  Hvis $X = \{x\}$ så skrives $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

- Mængden af fikspunkter betegnes
  $S^G = \{s \in S \mid g \cdot s = s, \quad \text{for alle} \quad g \in G\}$.