

Note om anvendelse af cykel-index til at tælle farvninger.

Leif K. Jørgensen

Lad X være en mængde med n elementer. På hvor mange måder kan man farve elementerne i X med k farver. Svaret er k^n . Men hvis X er en mængde med visse symmetrier så vil vi opfatte en del af disse farvninger som værende "ens". Altså hvis en symmetri g af X afbilder en farvning f_1 over i farvningen f_2 så vil vi ikke skelne mellem f_1 og f_2 . De regnes altså for at være "samme" farvning. I det tilfælde skal vi bruge gruppeteori for at tælle forskellige farvninger.

1 Teori

Antag at en endelig gruppe G virker på en endelig mængde X og lad C være en mængde af k farver. En farvning er da en funktion $f : X \mapsto C$. Lad S være mængden af mulige farvninger.

G virker på S ved $(g \cdot f)(t) = f(g^{-1} \cdot t)$.

Vi kan ikke se forskel på to farvninger f_1 og f_2 hvis der findes $g \in G$ så $g \cdot f_1 = f_2$. Lad os sige at f_1 og f_2 da er ækvivalente. (Dette giver en ækvivalensrelation.)

Antallet af ikke-ækvivalente farvninger (eller ækvivalensklasser af farvninger) er da lig med antal baner under G 's virkning på S , som bestemmes ved hjælp af Burnsides lemma. Vi skal derfor bestemme antallet $|S^g|$ af farvninger som g afbilder i sig selv, for ethvert $g \in G$.

Lad $g \in G$. Idet vi opfatter g som permutation af X kan g skrives som produkt af disjunkte cykler $g = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r$, hvor cykler af længde 1 er medtaget, altså ethvert element i X er i én af cyklerne. Hvis $g \cdot f = f$ hvor $g \in G, f \in S$, så tildeler f samme farve til hvert element i en cykel σ_i . Antal farvninger f hvor $g \cdot f = f$ (altså $f \in S^g$) er k^r , idet hver af de r cykler uafhængigt af hinanden kan tildeles en af de k farver (hvor r afhænger af g).

Burnsides lemma

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g|,$$

giver altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X}.$$

Vi vil nu omskrive denne formel ved hjælp af cykel-index.

En permutation $g \in S_n$ siges at være af cykel-type $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ hvis g er produkt af disjunkte cykler af længde hhv. $i_1, i_2, \dots, i_r$, hvor $i_1 + \dots + i_r = n$; cykler af længde 1 inkluderes altså. (Dette er Lauritzens definition. Bemærk at Biggs bruger en anden notation.)

Definition 1 (se også Biggs)

Cykel-indexet af en permutation g af cykel-type $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ defineres som

$$\zeta_g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r},$$

hvor $x_1, \dots, x_n$ er forskellige symboler (variable).

Vi ser at

$$k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X} = k^r = \zeta_g(k, \dots, k).$$

Antal farvninger er altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(k, \dots, k).$$

Definition 2 (se også Biggs)

Cykel-indexet af en undergruppe G af S_n defineres som

$$\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Fra ovenstående får vi:

Theorem 3 *Lad en endelig gruppe G virke på en endelig mængde X .*

Så er antallet af ikke-ækvivalente farvninger af elementerne i X med k farver:

$$\zeta_G(k, \dots, k).$$

2 Eksempler

Eksempel 1

På hvor mange måder kan man farve de seks flader af terning med to farver, når to farvninger der kan roteres over i hinanden regnes for at være ens. Fladerne kan nummereres $1, \dots, 6$. En rotation giver anledning til en permutation af $1, \dots, 6$. I nedenstående tabel vises de forskellige slags rotationer, antallet af rotationer af hver slags og typen af den tilsvarende permutation af $1, \dots, 6$.

Rotation	Antal	Typen af permutation
identitet	1	$1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1$
akse gennem to hjørner	8	$3 \leq 3$
akse gennem to flader, $\pm 90^\circ$	6	$1 \leq 1 \leq 4$
akse gennem to flader, $\pm 180^\circ$	3	$1 \leq 1 \leq 2 \leq 2$
akse gennem to kanter	6	$2 \leq 2 \leq 2$
	24	

Rotationsgruppens virkning på $1, \dots, 6$ har altså cykel-index

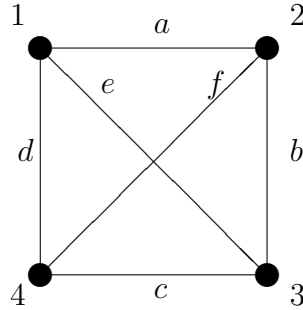
$$\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 8x_3^2 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3).$$

Antallet af farvninger er derfor

$$\zeta_G(2, \dots, 2) = \frac{1}{24}(2^6 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3) = 10.$$

Eksempel 2

Hvor mange simple grafer er der med 4 punkter? En simpel graf med 4 punkter kan opfattes som delgraf af en komplet graf K_4 med punkter $1, 2, 3, 4$. To grafer regnes for at være ens hvis de er isomorfe, altså hvis der er en permutation af $1, 2, 3, 4$, der afbilder den ene graf i den anden. Vi kan farve kanterne i K_4 med to farver: hvid og sort. Sort betyder at kanten er med i delgraften, og hvid betyder at den ikke er med. Antallet af delgrafer er så det samme som antal af farvninger af kanterne, hvor altså to farvninger regnes for at være ens hvis der er en permutation af $1, 2, 3, 4$, der afbilder den ene i den anden.



Lad kanterne i K_4 være a, b, c, d, e, f som vist på figuren. Der er fem typer af permutationer af $1, 2, 3, 4$. For hver type viser nedenstående tabel en repræsentant for denne type, antallet af permutationer af denne type, den tilsvarende permutation af kanterne og typen af permutationen af kanter.

Perm. af punkter	Antal	Perm. af kanter	Type af kant-perm.
$(1)(2)(3)(4)$	1	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	$1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 1$
$(1\ 2\ 3\ 4)$	6	$(a\ b\ c\ d)(e\ f)$	$2 \leq 4$
$(1\ 2\ 3)(4)$	8	$(a\ b\ e)(c\ d\ f)$	$3 \leq 3$
$(1\ 2)(3\ 4)$	3	$(a)(b\ d)(c)(e\ f)$	$1 \leq 1 \leq 2 \leq 2$
$(1\ 2)(3)(4)$	6	$(a)(b\ e)(c)(d\ f)$	$1 \leq 1 \leq 2 \leq 2$
	24		

Cykel-indexet af virkningen af S_4 på kanterne er altså

$$\zeta_{S_4}(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_2x_4 + 8x_3^2 + 9x_1^2x_2^2).$$

Antallet af grafer med 4 punkter er

$$\zeta_{S_4}(2, \dots, 2) = \frac{1}{24}(2^6 + 6 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 11.$$