Eksamen - Algebra 1

Torsdag den 8. januar 2015, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.
Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.
Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (10%)

Udregn følgende udtryk i $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$:

$$([21] + [22] \cdot [23]) \cdot [24]^{-1}.$$

Opgave 2 (15%)

Lad $\sigma = (3\ 7)(4\ 9)(1\ 7\ 4\ 2\ 11)(3\ 5\ 9)(1\ 5\ 8)$ være en permutation i S_{11}.

1. Skriv σ som produkt af disjunkte cykler.
2. Bestem ordenen af σ.
3. Bestem fortegnet af σ.

Opgave 3 (24%)

Lad $\sigma = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$ være en permutation i S_6.

1. Bestem antallet af permutationer i konjugeringsklassen $C(\sigma)$ i S_6 der indeholder σ.

Lad nu $H = \langle \sigma \rangle$ være undergruppen frembragt af σ.

2. Lad $g = (1\ 4)(2\ 3\ 6)$. Bestem elementerne i sideklassen gH.
3. Lad K være en undergruppe af S_6, som opfylder at H er en *normal* undergruppe af K. Vis at g ikke ligger i gruppen K.
4. Vis at $(2\ 3) \in N_{S_6}(H)$ (normalisatoren af H i S_6).

Opgave 4 (10%)

Vis at grupperne $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ er isomorfe.

Opgave 5 (6%)

1. Hvor mange elementer med orden 11 er der i gruppen $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$?
2. Bestem ordenen af gruppen $(\mathbb{Z}/99\mathbb{Z})^*$.

Opgave 6 (35%)

Betragt gruppen $GL_2(\mathbb{F}_3)$ af invertible 2×2 matricer over legemet $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}$.
Lad

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ [0] & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_3, a \neq [0] \right\}.$$

1. Vis at G er en undergruppe af $GL_2(\mathbb{F}_3)$.
   Hvad er den inverse til $\begin{bmatrix} a & b \\ [0] & a \end{bmatrix}$?
2. Bestem ordenen af G.
3. Vis at G er isomorf med $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Lad $S = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ være mængden af ordnede par (vektorer) af elementer fra $\mathbb{F}_3$. For $\begin{bmatrix} a & b \\ [0] & a \end{bmatrix} \in G$ og $(x, y) \in S$ defineres

$$\begin{bmatrix} a & b \\ [0] & a \end{bmatrix} \cdot (x, y) = (ax + by, ay).$$

4. Vis at dette definerer en virkning af G på S.
5. Bestem banen $G \cdot ([1], [0])$.
6. Bestem stabilisatoren $G_{([1],[0])}$.