

Eksamen - Algebra 1

Mandag den 9. februar 2015, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.

Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.

Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.

Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (8 %)

Lad $\sigma = (1\ 4\ 8\ 2)(3\ 9)(5\ 7\ 6)$.

1. Bestem ordenen af σ .
2. Bestem fortegnet af σ .

Opgave 2 (18 %)

Lad $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$.

1. Lad $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Find en permutation $\pi \in S_7$ som opfylder at $\sigma_1 = \pi\sigma\pi^{-1}$ eller forklar hvorfor der ikke findes en sådan permutation.
2. Lad $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Find en permutation $\pi \in S_7$ som opfylder at $\sigma_2 = \pi\sigma\pi^{-1}$ eller forklar hvorfor der ikke findes en sådan permutation.
3. Hvor mange permutationer i S_7 kan skrives på formen $\tau\sigma\tau^{-1}$ hvor $\tau \in S_7$.

Opgave 3 (15 %)

Lad $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ og lad $H = \langle \sigma \rangle$ være gruppen frembragt af σ .

1. Bestem ordenen af H .
2. Lad $g = (1\ 2)(3\ 4)$. Bestem alle elementer i gH .
3. Bestem mængden I_σ af inversioner af σ .

Opgave 4 (10 %)

Udregn følgende udtryk i $\mathbb{Z}/71\mathbb{Z}$.

$$[6] \cdot ([7] + [8] \cdot [9])^{-1}.$$

Opgave 5 (12 %)

1. Hvor mange elementer af orden 10 er der i gruppen $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$?
2. Hvor mange elementer af orden 12 er der i gruppen $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$?
3. Bestem ordenen af gruppen $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$

Opgave 6 (15 %)

Lad $(G, \circ)$ være en gruppe. Definér en ny komposition $*$ på mængden G ved $a * b = b \circ a$ for alle $a, b \in G$.

1. Vis at $(G, *)$ er en gruppe.
Vis at ethvert element $a \in G$ har samme invers element a^{-1} i de to grupper.
2. Vis at $\varphi : G \rightarrow G$, hvor $\varphi(g) = g^{-1}$, er isomorfi mellem de to grupper.

Opgave 7 (22 %)

Lad $G = GL_2(\mathbb{F}_3)$ være gruppen af invertible 2×2 matricer over legemet $\mathbb{F}_3$ med elementerne $[0], [1], [2]$, der i det følgende kort benævnes $0, 1, 2$. G er, ifølge "Note om endelige legemer", en gruppe af orden 48.

Lad $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_3, a \neq 0 \right\}$.

1. Vis at N er en normal undergruppe af G .
2. Bestem ordenen af kvotientgruppen $H = G/N$.
3. Lad $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_3 \right\}$ være mængden af vektorer. Som sædvanlig er $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$.
Vis at dette definerer en virkning af G på S .
4. Bestem stabilisatoren G_X af mængden $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
5. Bestem ordenen af G_X .