Facit til eksamen - Algebra 1

Torsdag den 8. januar 2015, 8.30–12.30.

Opgave 1

I $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$: $([21] + [22] \cdot [23]) \cdot [24]^{-1} = [43]$.

Opgave 2

1. $\sigma = (1\ 4\ 2\ 11)(3\ 5\ 8)(6)(7\ 9)(10)$.
2. $\mathrm{ord}(\sigma) = 12$
3. $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$

Opgave 3

Lad $\sigma = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$ være en permutation i S_6.

1. Antal permutationer af type $2 \leq 4$: 2-cyklen kan vælges på $\binom{6}{2} = 15$ måder. En 4-cykel med de resterende 4 tal kan vælges på $3! = 6$ måder. I alt $15 \cdot 6 = 90$.

Lad nu $H = \langle \sigma \rangle$ være undergruppen frembragt af σ.

2. $gH = \{(1\ 4)(2\ 3\ 6), (2\ 5\ 6\ 3), (1\ 4)(2\ 6\ 5), (3\ 5)\}$.
3. $g\sigma g^{-1} = (1\ 4)(2\ 3\ 5\ 6) \notin H$.
4. $(2\ 3)\sigma(2\ 3)^{-1} = \sigma^{-1}$. Derfor er $(2\ 3)\sigma^i(2\ 3)^{-1} = \sigma^{-i}$ og $(2\ 3)H(2\ 3)^{-1} = H$.

Opgave 4

Da $6 \cdot 35 = 210$, $\gcd(6, 35) = 1$ og $14 \cdot 15 = 210$, $\gcd(14, 15) = 1$ er begge grupper isomorfe med $\mathbb{Z}/210\mathbb{Z}$ ifølge 2.8.2.

Opgave 5

1. $\varphi(11) = 10$.
2. $\varphi(99) = 60$.

Opgave 6

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ [0] & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ [0] & a \end{bmatrix}$
2. $|G| = 6$.
3. G er cyklisk frembragt af $\begin{bmatrix} [2] & [1] \\ [0] & [2] \end{bmatrix}$. (Eller af $\begin{bmatrix} [2] & [2] \\ [0] & [2] \end{bmatrix}$.)
4. Vise at Definition 2.10.1 er opfyldt.
5. $G \cdot ([1], [0]) = \{([1], [0]), ([2], [0])\}$.
6. $G_{([1],[0])}$ består af matricer i G med $a = [1]$.