Facit til Eksamen - Algebra 1

Mandag den 9. februar 2015, 8.30–12.30.

Opgave 1

1. $\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(4, 2, 3) = 12$.
2. $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{4-1}(-1)^{2-1}(-1)^{3-1} = 1$.

Opgave 2

Lad $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$.

1. $\sigma_1 = (1\ 4\ 5)(2\ 7\ 3\ 6)$.
   $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 7\ 5)(4\ 6)$.
2. $\sigma_2 = (1\ 5)(2\ 6\ 4\ 7\ 3)$ har ikke samme type som σ. π findes altså ikke.
3. Der er 420 permutationer i S_7 på formen $\tau\sigma\tau^{-1}$.

Opgave 3

1. $|H| = \text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(3, 2) = 6$.
2. $gH = \{(1\ 2)(3\ 4), (2\ 4\ 5\ 3), (1\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4\ 5), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 5\ 3)\}$.
3. $I_\sigma = \{(1, 3), (2, 3), (4, 5)\}$.

Opgave 4

$[6] \cdot ([7] + [8] \cdot [9])^{-1} = [54]$ i $\mathbb{Z}/71\mathbb{Z}$.

Opgave 5

1. 0
2. $\varphi(12) = 4$.
3. $\varphi(33) = 20$.

Opgave 6

Opgave 7

1.

2. $|G/N| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{48}{2} = 24$.

3.

4. Hvis $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er $g \cdot X = \{g \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\} = \{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2a \\ 2c \end{bmatrix}\}$. Denne mængde er lig med X når $c = 0$ og $a \neq 0$. Desuden er $d \neq 0$ da matricen er invertibel.
$G_X = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{F}_3, a \neq 0, d \neq 0\}$.

5. $|G_X| = 12$.