Note om permutationsmatricer og den alternerende gruppe

Leif K. Jørgensen

1 Permutationsmatricer

I denne note skitseres et alternativt bevis for at en permutation ikke kan skrives som både et produkt af et lige antal transpositioner og et ulige antal transpositioner. Se dog forbeholdet sidst i denne note.

Definition 1 *Lad σ være en permutation af $\{1, 2, \ldots, n\}$. Så er* permutationsmatricen P_σ *en $n \times n$ matrix hvor indgang (i, j) er*

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sætning 2 *Hvis $\sigma, \tau \in S_n$ så er $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$.*

Bevis Vi udregner indgang (i, j) i produktet: $(P_\sigma P_\tau)_{ij} = \sum_k (P_\sigma)_{ik}(P_\tau)_{kj}$. Vi ser at $(P_\sigma)_{ik}(P_\tau)_{kj} = 0$, med mindre $\sigma(k) = i$ og $\tau(j) = k$. Summen er altså 1 hvis $\sigma(\tau(j)) = i$ og ellers 0. Dermed er $(P_\sigma P_\tau)_{ij} = (P_{\sigma\tau})_{ij}$. $\square$

Korollar 3 *$P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\sigma^{-1}} = P_e = I$ og $P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1}$.*

Korollar 4 *$\pi : S_n \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ defineret ved $\pi(\sigma) = P_\sigma$ er en homomorfi, og $\pi(S_n)$, mængden af $n \times n$ permutationsmatricer er en undergruppe af $GL_n(\mathbb{R})$.*

Bemærk at $\mathbb{R}$ kan erstattes af et vilkårligt andet legeme, hvis det ønskes. Bemærk også at $\pi : S_n \mapsto \pi(S_n)$ er en isomorfi.

Da $\sigma(j) = i$ hvis og kun hvis $\sigma^{-1}(i) = j$ får vi:

Lemma 5 *For enhver permutation $\sigma \in S_n$ er $P_\sigma^T = P_{\sigma^{-1}}$ og dermed er $P_\sigma P_\sigma^T = I$.*

P_σ er altså en ortogonal matrix og dermed er determinanten af P_σ enten 1 eller -1.

Eksempel 6 *Lad* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3\ 4\ 5) = (2\ 5)(2\ 4)(2\ 3)$.

Så er

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svarende til at σ er skrevet som produkt af tre transpositioner ser vi at P_σ kan fås fra I_5 ved følgende tre elementære rækkeoperationer: ombyt række 2 og række 3, ombyt række 2 og række 4, ombyt række 2 og række 5. Ifølge regnereglerne for determinant er $\det P_\sigma = (-1)^3 \det I_5 = (-1)^3$. □

2 Fortegnet af en permutation

Som antydet i eksemplet har vi følgende resultat (som let kan bevises).

Sætning 7 *Lad $\sigma \in S_n$. Antag at σ kan skrives som produkt af k transpositioner:*

$$\sigma = (i_k\ j_k)\ \dots\ (i_2\ j_2)(i_1\ j_1).$$

Så fremkommer P_σ fra I_n ved anvendelse af følgende elementære rækkeoperationer (notation fra Spence, Insel og Friedberg):

$$\mathbf{r}_{i_1} \leftrightarrow \mathbf{r}_{j_1}, \mathbf{r}_{i_2} \leftrightarrow \mathbf{r}_{j_2}, \dots, \mathbf{r}_{i_k} \leftrightarrow \mathbf{r}_{j_k}.$$

Desuden er $\det P_\sigma = (-1)^k$.

Da $\pi : S_n \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ og $\det : GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ er homomorfier, så er den sammensatte afbildning $\operatorname{sgn} = \det \circ \pi$ også en homomorfi. Vi har set ovenfor at $\operatorname{sgn}(S_n) = \{1, -1\}$.

Kernen af sgn er altså en normal undergruppe af S_n. Denne gruppe kaldes den *alternerende gruppe* og den betegnes A_n.

Hvis $\text{sgn}(\sigma) = 1$ så er $\sigma \in A_n$ og σ er en *lige* permutation, da den er produkt af et lige antal transpositioner.
Hvis $\text{sgn}(\sigma) = -1$ så er $\sigma \notin A_n$ og σ er en *ulige* permutation, da den er produkt af et ulige antal transpositioner.

En m-cykel

$$(x_1\ x_2\ \dots x_m) = (x_1\ x_m)(x_1\ x_{m-1})\dots(x_1\ x_2)$$

er en lige permutation hvis og kun hvis m er ulige.

Ved at udnytte at sgn er en homomorfi får vi:

Sætning 8 *En permutation σ er en lige permutation hvis og kun hvis antallet af cykler af lige længde, der indgår når σ skrives som produkt af disjunkte cykler, er lige.*

3 Problemer med ovennænte fremgangsmåde

Ovenstående gennemgang af fortegnet af en permutation er egentlig lidt "snyd", da den er baseret resultater om determinanter som I ikke har bevist. Faktisk kan determinant-resultaterne bevises ved hjælp af teorien om fortegn af permutationer.

Dette kan illustreres ved følgende alternative definition af determinanten af en $n \times n$ matrix A.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{1}$$

4 Opgaver

1. Kontrollér påstandene i Eksempel 6.
2. Lad $\sigma = (1\ 4\ 3\ 5)(2\ 6) \in S_6$. Bestem permutationsmatricen P_σ.
3. Vis at en permutationsmatrix P_σ har præcis ét 1-tal i hver række og i hver søjle.
4. Vis at række $\sigma(i)$ i P_σ er lig med række i i I_n.
5. Opskriv alle elementer i A_4.

6. Lad $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ være en vilkårlig 3×3 matrix. Udregn $\det(A)$ både ved hjælp af ligning (1) ovenfor og ved hjælp af den sædvanlige metode. Giver det samme resultat?