

Prøve-Eksamen - Algebra 1

Xyzdag den 38. december, 2013, 8.30–12.30.

Det er tilladt at benytte: bøger, notater og lignende.

Der må *ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.

Det er vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at mellemregninger tages med i passende omfang.

Det er ved hver opgave angivet hvor meget opgaven vægtes i besvarelsen.

Opgave 1 (20%)

Lad $\sigma = (1\ 2)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5\ 6)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ være en permutation.

1. Skriv σ som produkt af disjunkte cykler.
2. Bestem ordenen af σ .
3. Bestem fortegnet af σ .
4. Bestem mængden I_σ af inversioner af σ .

Opgave 2 (18%)

Udregn hver af følgende udtryk i $\mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$ eller forklar hvorfor udtrykket ikke giver mening.

- $[18] \cdot ([19] + [4] \cdot [5])^{-1}$
- $[8] \cdot ([9] + [10] \cdot [11])^{-1}$

Opgave 3 (8%)

Lad $G = \mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ være en cyklisk gruppe. Bestem antallet af frembringere for G .

Opgave 4 (24%)

Lad $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ være legemet med 3 elementer og lad $GF(3, \mathbb{F}_3)$ være gruppen af alle invertible 3×3 matricer med indgange fra \mathbb{F}_3 . (I denne opgave vil x være en kort notation for det element i \mathbb{F}_3 som vi normalt skriver som $[x]$ eller $[x]_3$.)

1. Vis at ethvert element i $GF(3, \mathbb{F}_3)$ på formen $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hvor $a, b, c \in \mathbb{F}_3$

\mathbb{F}_3 har orden 1 eller 3.

2. Vis at $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}$ er en undergruppe af $GL(3, \mathbb{F}_3)$.

3. Bestem ordenen af H .

Opgave 5 (30%)

Lad $a = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ og $d = (1\ 3\ 5)(2\ 6\ 4)$ være permutationer i S_6 . Lad $G = \{a, b = ad^2, c = ad, d, e, f = d^2\}$. I S_6 har vi den sædvanlige komposition \circ for permutationer.

1. Skriv hvert element i G som produkt af disjunkte cykler.
2. Fremstil en kompositionstavle for (G, \circ) og vis derved at G er lukket under \circ .
3. Hvilken kendt gruppe er isomorf med G .
4. Bestem cykelindexet ζ_G for G .

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af aflevedere ark på 1. side af besvarelsen.