Matrix-vektor-produkt

Hvis $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ er en $m \times n$ matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ så er $A\mathbf{v}$ vektoren

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \ldots + v_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m.$$

Alternativ beregning

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 70 \\ * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Indgang nr. i i $A\mathbf{v}$ fås som prikprodukt af A's række nr. i og $\mathbf{v}$.

Udvalgte **regneregler**:

Hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så er $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvor I_n er $n \times n$ identitetsmatricen.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n]$ så er $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$, hvor $\mathbf{e}_j$ er den j'te standardvektor i $\mathbb{R}^n$.

$$(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$$

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$Ac\mathbf{v} = cA\mathbf{v}$$

Lineære ligningssystemer, rækkeoperationer

En **lineær ligning** er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er variable (ubekendte) og $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ faste (kendte) tal.

F.eks.

$a_1x_1 + a_2x_2 = b$ eller $a_1x + a_2y = b$ som er ligningen for en linie i planen.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ eller $a_1x + a_2y + a_3z = b$ som er ligningen for en plan i rummet.

Et **lineært ligningssystem** består af et antal (f.eks. m) lineære ligninger, der alle har de samme variable:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Ligningssystemet kan også skrives som

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Eller som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A kaldes **koefficientmatricen** for ligningssystemet.

Den **udvidede koefficientmatrix** (totalmatrix) er

$$[A\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Vi siger at et ligningssystem er **konsistent** hvis det har mindst én løsning. Ellers er det **inkonsistent**.

Eksempel: To lineære ligninger med to ubekendte x og y: De to ligninger er ligning for to linier, hhv. ℓ_1 og ℓ_2.
Tre muligheder:

- De to ligninger skærer hinanden i ét punkt, (a, b). Så er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en løsning. Dette er den eneste løsning.

- Linierne ℓ_1 og ℓ_2 er parallelle og skærer ikke hinanden. Ligningssystemet har ingen løsning. Det er inkonsistent.

- $\ell_1 = \ell_2$. Løsningsmængden er uendelig.

Elementære rækkeoperationer:

1. ombyt række i og række j: $r_i \leftrightarrow r_j$

2. gange række i med tal $c \neq 0$: $cr_i \rightarrow r_i$

3. adder c gange række i til række j: $r_j + cr_i \rightarrow r_j$

Hvis matricen B fremkommer fra matricen A ved én af disse rækkeoperationer så kan A fås fra B ved anvendelse af henholdsvis

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad \frac{1}{c} r_i \rightarrow r_i, \quad r_j - cr_i \rightarrow r_j.$$