

Span og lineær uafhængighed

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i \mathbb{R}^n .

Mængden af alle vektorer i \mathbb{R}^n , der er linear kombination af vektorerne i \mathcal{S} kaldes mængden (underrummet) udspændt af \mathcal{S} .

Skrives: $\text{Span } \mathcal{S}$.

En vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^n ligger i $\text{Span } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$

hvis og kun hvis

$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k \ \mathbf{v}]$ ikke har pivotposition i sidste søjle.

En mængde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ af vektorer i \mathbb{R}^n siges at være

lineært afhængig hvis der findes skalarer c_1, c_2, \dots, c_k , som ikke alle er 0 sådan at $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \dots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

lineært uafhængig hvis ligningen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \dots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun er opfyldt når $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0$.

Enhver mængde af vektorer er enten lineært afhængig eller lineært uafhængig, men ikke både lineært afhængig og lineært uafhængig.

Ovenstående ligning er **homogen**, idet højresiden er nulvektoren.

Når en løsningen til et homogent ligningsystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skrives på vektorform med metoden fra afsnit 1.3, så skrives den som linear kombination af lineært uafhængige vektorer, (forudsat at der er frie variable).

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i \mathbb{R}^n .

(Sætning 1.6)

$\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$

hvis og kun hvis

$A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle rækker.

(Sætning 1.8)

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært uafhængig

hvis og kun hvis

$A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle søjler.

Sætning 1.7

$$\text{Span } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} = \text{Span } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$$

hvis og kun hvis

$$\mathbf{v} \in \text{Span } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}.$$

Sætning 1.9

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært afhængig

hvis og kun hvis

enten $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ eller der findes $j \geq 2$ sådan \mathbf{u}_j er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}$.

Hvis søjle j i $A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k]$ ikke er en pivotsøjle så er \mathbf{u}_j en linear kombination af $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}$.