

Funktioner, lineære transformationer

En funktion (transformation) $f : A \rightarrow B$ knytter til hvert element $x \in A$ et entydigt element $f(x) \in B$.

A kaldes definitionsmængden (domænet) for f .

B kaldes (codomænet) for f .

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ kaldes billedmængden (værdimængden, range) af f .

(Der findes ikke noget anerkendt dansk ord for codomain.)

Lad $f : A \rightarrow B$ være en funktion, hvor A og B er vilkårlige mængder.

f siges at være **injektiv** (eller enentydig; engelsk: one-to-one, kan evt. skrives 1 – 1) hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når x_1 og x_2 er forskellige elementer i A .

f siges at være **surjektiv** (eller på; engelsk: onto) hvis der for ethvert element $b \in B$ findes et element $a \in A$ så $f(a) = b$.

f : "fra x -værdier til y -værdier"

f er en funktion:

"for ethvert x er der et (entydigt) y "

f er surjektiv:

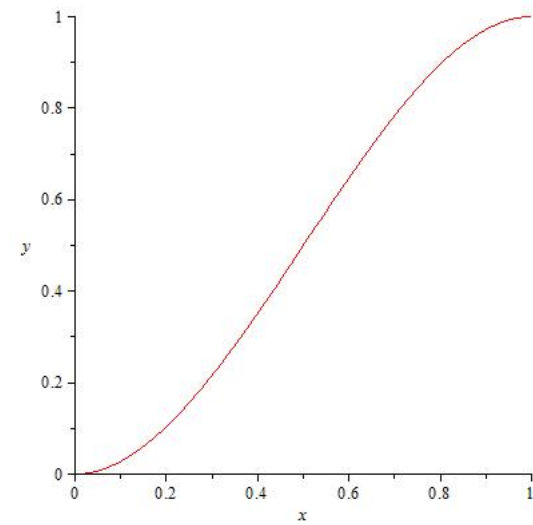
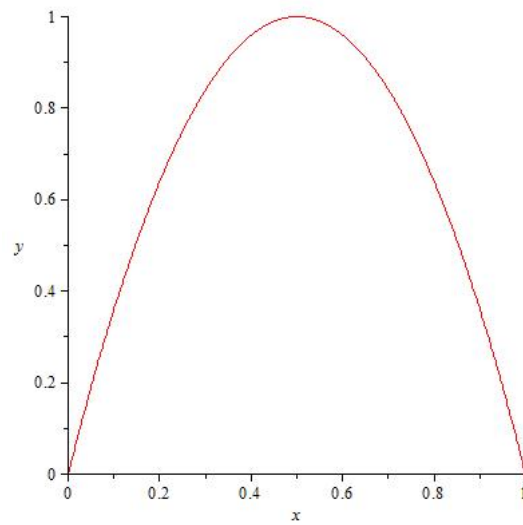
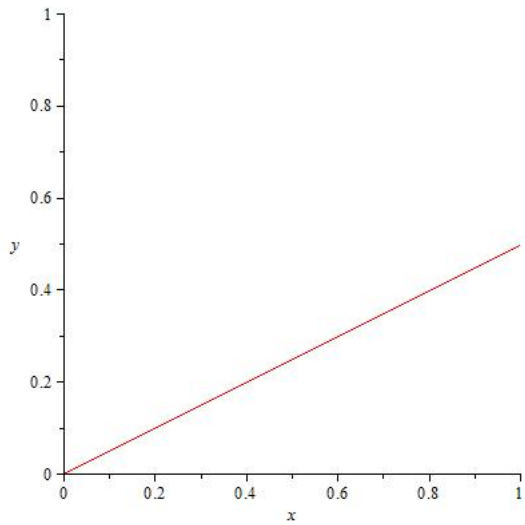
"for ethvert y er der mindst ét x "

f er injektiv:

"for ethvert y er der højst ét x "

f er **bijektiv** (altså injektiv og surjektiv):

"for ethvert y er der præcis ét x "



Tre funktioner hvor $A = B = [0, 1]$. Disse er henholdsvis
enentydig, men ikke på
på, men ikke enentydig
enentydig og på.

Sammensat funktion:

Hvis $f : A \rightarrow B$ og $g : B \rightarrow C$

så er $g \circ f : A \rightarrow C$ funktionen, der opfylder $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Hvis $f : A \rightarrow B$ er både injektiv og surjektiv så findes der for ethvert element $b \in B$ et entydigt element $a \in A$ som opfylder $f(a) = b$. Dette entydige element skrives $a = f^{-1}(b)$.

Så er $f^{-1} : B \rightarrow A$ også en funktion. Den kaldes f 's **inverse funktion**.

$f^{-1} \circ f : A \rightarrow A$ og $f \circ f^{-1} : B \rightarrow B$ er funktioner der opfylder $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, for alle $a \in A$ og $(f \circ f^{-1})(b) = b$ for alle $b \in B$.

En funktion $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ siges at være en **lineær transformation** hvis

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

En transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er lineær hvis og kun hvis

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og alle $a, b \in \mathbb{R}$.

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ opfylder

$$T(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_kT(\mathbf{u}_k)$$

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ opfylder $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Hvis A er $m \times n$ matrix så defineres $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ved $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
 T_A siges at være en **matrix transformation**.

Enhver matrix transformation er en lineær transformation.

Hvis $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation og

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

så er $T(\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

A kaldes **standardmatricen** for T .

Enhver lineær transformation er altså en matrix transformation.

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.

Billedmængden af T er rummet udspændt af søjlerne i A .

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **surjektiv**
- A 's søjler udspænder \mathbb{R}^m
- A har pivot i alle rækker
- $\text{rank } A = m$

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A er $m \times n$.

Nulrummet af T er mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **injektiv**
- nulrummet af T er $\{\mathbf{0}\}$
- A har pivot i alle søjler