

# Invers matrix

En  $n \times n$  matrix  $A$  siges at være **invertibel** hvis der findes en  $n \times n$  matrix  $B$  så

$$AB = BA = I_n.$$

$B$  siges da at være den **inverse** til  $A$ , skrives:  $B = A^{-1}$ .

Hvis  $A$  er en invertibel  $n \times n$  matrix og  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  så har ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  en entydig løsning:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

## Regneregler for invers matrix.

Lad  $A$  og  $B$  være invertible  $n \times n$  matricer. Så er

- $A^{-1}$  invertibel og  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,
- $AB$  invertibel og  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,
- $A^T$  invertibel og  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

# Elementære matricer

Lad  $A$  være en matrix med  $m$  rækker

Hvis  $E$  fremkommer fra  $I_m$  ved anvendelse af en elementær rækkeoperation

så fremkommer  $EA$  fra  $A$  ved anvendelse af den samme elementære rækkeoperation.

$E$  siges da at være en **elementær matrix**.

Enhver elementær matrix er invertibel.

- Hvis  $E$  fremkommer fra  $I_n$  ved rækkeombytning så er  $E^{-1} = E$ .
- Hvis  $E$  fremkommer fra  $I_n$  ved at skalere række  $i$  med en faktor  $c \neq 0$  så fremkommer  $E^{-1}$  fra  $I_n$  ved at skalere række  $i$  med en faktor  $\frac{1}{c}$ .
- Hvis  $E$  fremkommer fra  $I_n$  ved at addere  $c$  gange række  $i$  til række  $j$  så fremkommer  $E^{-1}$  fra  $I_n$  ved at addere  $-c$  gange række  $i$  til række  $j$ .

Enhver matrix  $A$  kan omskrives til en matrix  $R = \text{rref}(A)$  på reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer, der svarer til multiplikation med elementære matricer, hhv.  $E_1, E_2, \dots, E_k$ .

Så er

$$E_k \dots E_2 E_1 A = R.$$

Der findes altså en invertibel matrix  $P$  ( $P = E_k \dots E_2 E_1$ ) så

$$PA = R$$

$$P^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}.$$

(Theorem 2.6)

Lad  $A$  være en  $n \times n$  matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente

- $A$  er invertibel.
- $A$  har pivot i alle søjler.
- $A$  har rang  $n$ .
- $\text{rref}(A) = I_n$ .

(Theorem 2.6)

Hvis  $A$  og  $B$  er  $n \times n$  matricer, der opfylder

$$AB = I_n$$

så er

$$BA = I_n$$

og dermed er  $A$  og  $B$  invertible,  $A^{-1} = B$ ,  $B^{-1} = A$ .

### Algoritme til beregning af invers:

Lad  $A$  være en  $n \times n$  matrix. Betragt følgende  $n \times 2n$  matrix

$$[A \ I_n].$$

Omskriv denne matrix til reduceret trappeform på følgende form

$$[R \ B].$$

- Hvis  $R = I_n$  så er  $A$  invertibel og  $A^{-1} = B$ .
- Hvis  $R \neq I_n$  så er  $A$  ikke invertibel.  
(Allerede når man ser at der ikke kan være pivot i de første  $n$  søjler, kan man konkludere at  $A$  ikke er invertibel.)



## Ligningssystemer og invers matrix:

Hvis  $A$  er en invertibel  $n \times n$  matrix så kan løsningen til et ligningssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  findes som

$$\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b},$$

men hvis den inverse ikke er kendt er det nemmere finde løsningen med den sædvanlige metode:

$$[A \ \mathbf{b}] \rightarrow \dots \rightarrow [I_n \ \mathbf{c}].$$

Hvis  $B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p]$  er en  $n \times p$  matrix så kan ligningssystemerne

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

skrives som  $AX = B$  hvor  $X = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p]$  er en  $n \times p$  matrix.

Løsningen  $X = A^{-1}B$  kan beregnes på følgende måde

$$[A \ B] \rightarrow \dots \rightarrow [I_n \ A^{-1}B].$$

# Inverse lineære transformationer

Lad  $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  være en lineær transformation og lad  $A$  være dens standardmatrix.  $A$  er  $m \times n$ .

Følgende betingelser er ækvivalente

- $T$  har en **invers funktion**
- $\text{rank } A = n = m$
- $A$  har en invers matrix.

Den inverse funktion  $T^{-1}$  er da den lineære transformation med standardmatrix  $A^{-1}$ .