Determinanter

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i,j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1)\times(n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

Definition af determinant.

$n = 1$: $\det[a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$: $\det A =$

$$a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

(i,j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant:
$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$.

$n = 2$: $\quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
og hvis $ad - bc \neq 0$ så er matricen invertibel med invers

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

(i, j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Sætning 3.1+
Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}.$$

Udvikling efter søjle j:

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

Determinanten af en **øvre triangulær** matrix er produktet af diagonalindgangene:

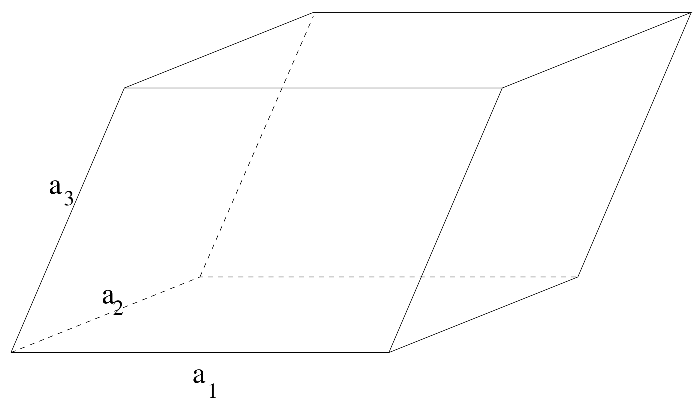
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

og en **nedre triangulær** matrix:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]|$ er da arealet af et parallelogram udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]|$ er da rumfang af et parallelepipedum udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.



Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k\det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k}\det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

Egenskaber for determinanter. A og B er $n \times n$ matricer.

- A har en invers hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

Sidstnævnte egenskab betyder at determinanter kan beregnes ved udvikling efter en søjle.