Ortogonalt komplement, ortogonal projektion

W et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Det ortogonale komplement af W er *underrummet*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in W\}.$$

Hvis $W = \text{span}\,\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ så er $W^\perp = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}^\perp$.

For enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ findes der entydige vektorer $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$ så

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}.$$

$\mathbf{w}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W,
og betegnes $U_W(\mathbf{u})$.
U_W er da en *lineær* operator på $\mathbb{R}^n$.

Ortogonal projektion.

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim W = k > 0$
og C være en $n \times k$ matrix hvis søjler udgør en basis for W.
Så har ortogonalprojektionsoperatoren U_W standardmatrix

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W kan altså beregnes som

$$U_W(\mathbf{u}) = P_W \mathbf{u},$$

eller, hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en *ortonormal* basis, som

$$U_W(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Underrum knyttet til matricer.

For ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n \quad \text{og} \quad (W^{\perp})^{\perp} = W.$$

For enhver matrix A er

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Null } A.$$

Ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er søjlerum af en matrix og dermed også rækkerum af den transponerede matrix: $W = \text{Row } A$.
Det ortogonale komplement bestemmes altså som $W^{\perp} = \text{Null } A$.

Desuden kan vi nu se at enhvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er nulrum af en matrix:
Til underrummet $W^{\perp}$ findes en matrix A med Row $A = W^{\perp}$.
Så er Null $A = (\text{Row } A)^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} = W$.