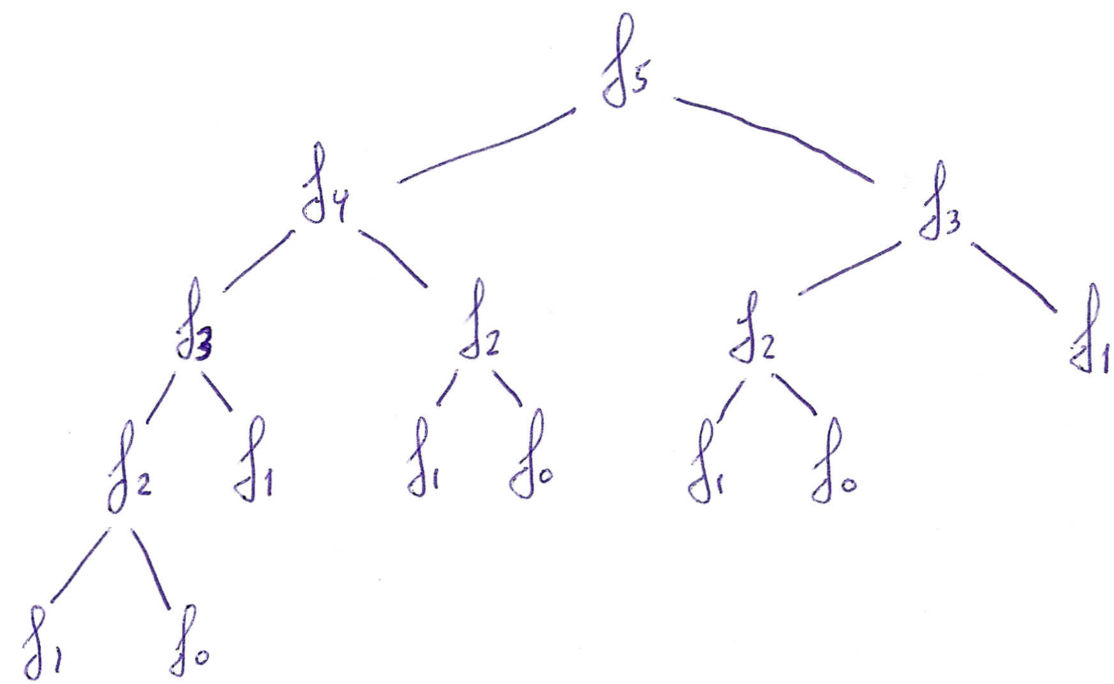

f_5
f_4
f_3
f_3
f_2
f_2
f_1
f_2
f_1
f_1
f_0
f_1
f_0
f_1
f_0

$P(n)$: rekursiv beregning af f_n kræver f_n beregninger af f_1.

$P(n)$ er sand for alle $n \geq 2$.

Bevis ved stærk induktion.
Basisskridt: $P(2)$ er sand og $P(3)$ er sand.
Induktionsskridt: Lad $k \geq 2$ og antag $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ alle er sande.
Beregn $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$.

Beregning af f_k kræver f_k beregninger af f_1.
Beregning af f_{k-1} kræver f_{k-1} beregninger af f_1.

I alt $f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$ beregninger af f_1.
$P(k+1)$ er altså sand.

Dermed er $P(n)$ sand for alle $n \geq 2$.

Rekursiv beregning af f_n kræver f_{n-1} beregninger af f_0.

procedure fibonacci (n: ikke-negativt heltal)
if $n = 0$ **then** fibonacci(0) := 0
else
  if $n = 1$ **then** fibonacci(1) := 1
  else fibonacci(n) := fibonacci($n-1$)+fibonacci($n-2$)

Betragt en (while/for/... -) løkke i en procedure.
En invariant er et udsagn, som vi skal bevise er sandt før og efter hvert gennemløb af løkken.

$P(n)$: invarianten er sand før n'te gennemløb af løkken.

Vi skal bevise:

- Invarianten er sand før første gennemløb. Altså $P(1)$ er sand.

- Hvis invarianten er sand før et gennemløb så er den også sand efter. Altså $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ for alle $k \geq 1$.

Ifølge induktionsprincippet er $P(n)$ sand for alle $n \geq 1$.
Dermed er invarianten altid sand.

Også efter sidste gennemløb.

procedure factorial(n: ikke-negativt helt tal)

$i := 0$

$x := 1$

while $i < n$

$\{$ invariant: $x = i!$ $\}$

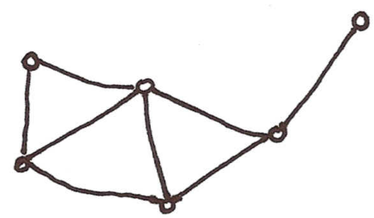
begin

    $i := i + 1$

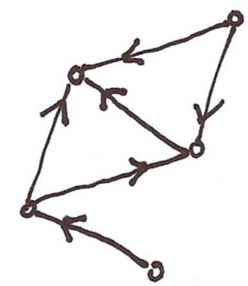
    $x := x \cdot i$

end

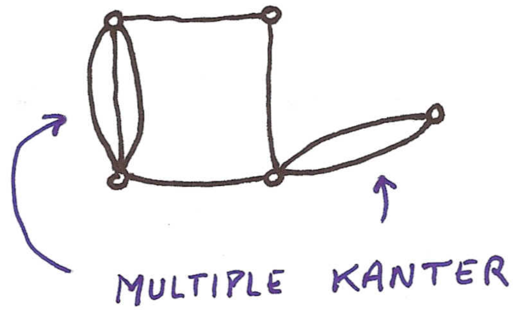
$\{ x = n! \}$



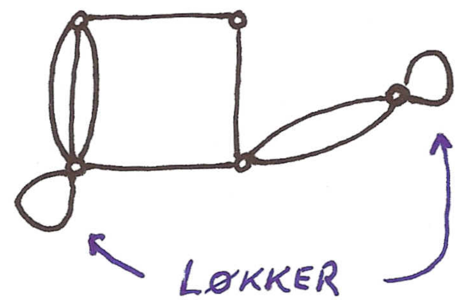
SIMPEL IKKE-ORIENTERET GRAF



ORIENTERET GRAF



MULTIGRAF



PSEUDOGRAF

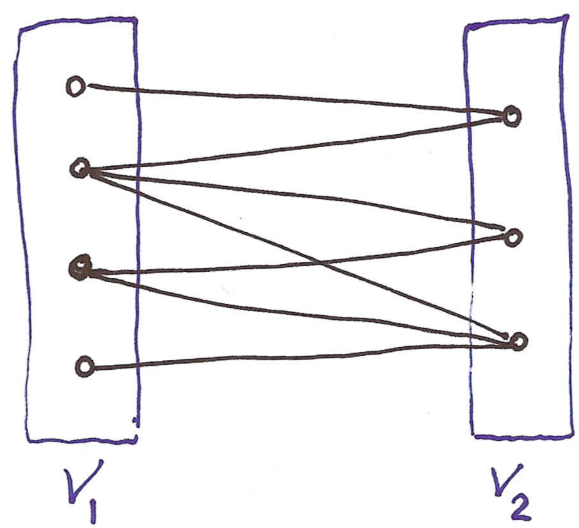
En (ikke-orienteret multi-) graf $G = (V, E)$ består af

- En ikke-tom mængde V. Et element i V kaldes et punkt eller en knude (engelsk: vertex).

- En mængde E, hvis elementer kaldes kanter (engelsk: edges).
  En kant $e \in E$ er knyttet til et par af forskellige punkter $\{u, v\}$. u og v er endepunkterne af e. e forbinder u og v.

V og E er endelige mængder.

En graf $G = (V, E)$ siges at være todelt (engelsk: bipartite) hvis $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, og hver kant i E har det ene endepunkt i V_1 og det andet endepunkt i V_2.



Hvis $G = (V, E)$ er en graf
og $H = (W, F)$ er en *graf*
så siger vi at H er en delgraf af G
hvis $W \subseteq V$ og $F \subseteq E$.

Hvis $e = \{u, v\} \in F$ så er $u, v \in W$, H er en graf.

Nabomatricen af en simpel graf $G = (V, E)$, hvor $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, er $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ som opfylder:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bemærk: det er nødvendigt at numerere grafens punkter $v_1, \ldots, v_n$.
Matricen afhænger af den valgte numerering.

To simple grafer G_1 og G_2 siges at være isomorfe hvis grafernes punkter kan numereres så

$$\text{nabomatricen af } G_1 = \text{nabomatricen af } G_2.$$

De betyder at graferne er “identiske”.

Bogens definition: to simple grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ og $G_2 = (V_2, E_2)$ er isomorfe hvis der findes funktion $f : V_1 \mapsto V_2$, som er enentydig og på, og som opfylder at

$$\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2.$$

Definition. Let G være en ikke-orienteret graf. Lad $n \geq 0$ være et helt tal og lad u og v være punkter i G. En vej (path) af længde n fra u til v er en følge af kanter

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

i G, som opfylder at der findes punkter $u = x_0, x_1, \ldots, x_n = v$ i G sådan at

$$e_i \text{ har endepunkter } x_{i-1} \text{ og } x_i, \text{ for alle } i = 1, \ldots n.$$

Hvis $u = v$ og $n > 0$ så kaldes vejen en kreds.
Vejen (kredsen) siges at være simpel hvis alle kanterne $e_1, \ldots, e_n$ er forskellige.

Sætning 1. Hvis der er en vej fra u til v i G så er der også en simpel vej fra u til v i G.

En ikke-orienteret graf G siges at være sammenhængende hvis der er en vej fra u til v i G for ethvert par af punkter u og v i G.

En sammenhængskomponent i en graf G er en sammenhængende delgraf af G som ikke er delgraf af en anden sammenhængende delgraf af G.

Definition. En Euler-kreds i en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ er en simpel kreds $e_1, \dots, e_n$, som bruger alle kanter i G, altså: $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Sætning. En sammenhængende multigraf G med mindst to punkter har en Euler-kreds hvis og kun hvis alle punkter i G har lige grad.

Procedure Kreds(G: graf, hvor alle grader er lige,
v: punkt, hvor deg(v) $\geq$ 2)

$K := v$
$u := v$
while deg(u) $>$ 0
begin
  $w :=$ en nabo til u
  Tilføj kanten $\{u, w\}$ til K
  fjern kanten $\{u, w\}$ fra G
  $u := w$
end

Invariant:

1. K er en vej fra v til u
2. Hvis $u = v$ så har alle punkter lige grad.
3. Hvis $u \neq v$ så er deg(u) og deg(v) ulige og alle andre punkter har lige grad.

Procedure Euler (G: sammenhængende graf, hvor alle
punkter har lige grad.)

$v :=$ vilkårligt punkt i G
circuit:=Kreds(G, v)
$H := G$ minus kanterne i circuit
$u := v$
while u har ikke gennemløbet circuit
begin{Invariant: se næste side}
    if deg(u) > 0 **then**
    begin
        subcircuit:=Kreds(H, v)
        $H := H$ minus kanterne i subcircuit
        circuit:=circuit med subcircuit indsat efter u
    end
    $u :=$ næste punkt på circuit
end

Invariant:

- circuit er en kreds i G
- Hver kant i G er enten i H eller i circuit, ikke i begge.
- Alle punkter på circuit før u har grad 0 i H