# DMat-22

En (binær) relation $R$ på en mængde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, kan repræsenteres af

$(V, E)$

- den orienterede graf $(A, R)$. Altså grafen med et punkt for hvert element i $A$ og en kant orienteret fra $a_i$ til $a_j$ hvis $a_i R a_j$.

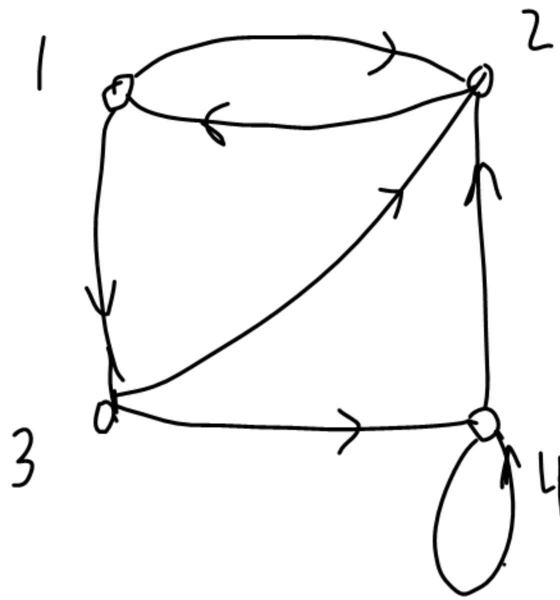
  $(a_i, a_j) \in R$

- $n \times n$ matricen $M_R = [m_{ij}]$ hvor

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis } a_i R a_j \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

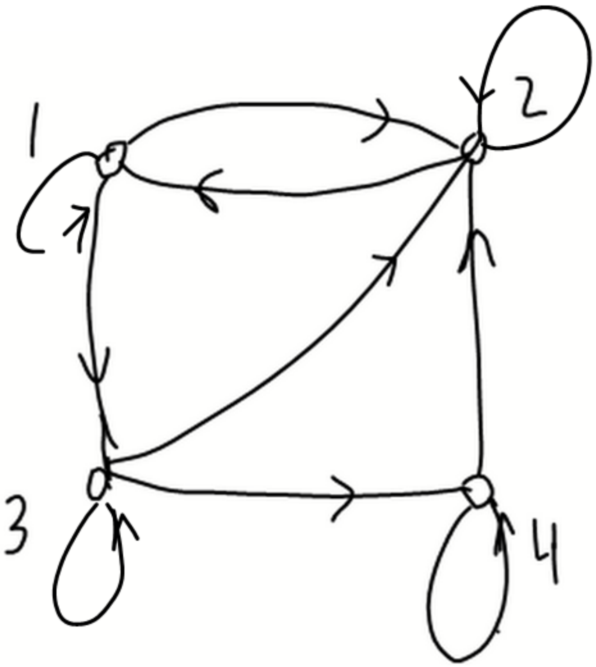
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,1), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)\}$$

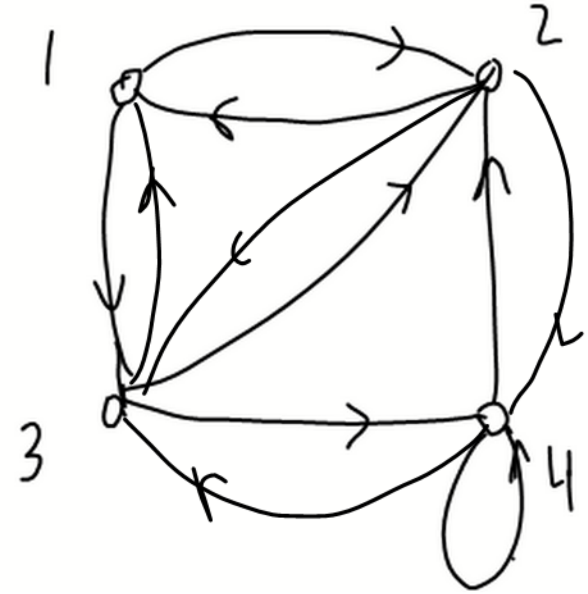



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Refleksiv aflukning



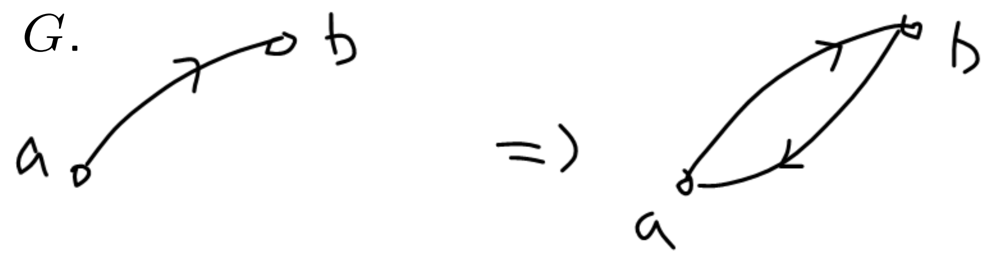

Symmetrisk afl.



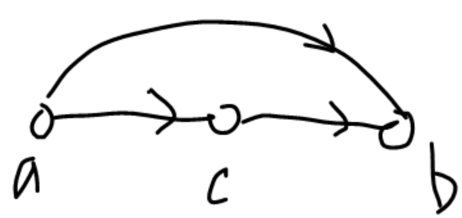
Lad $R$ være en relation på en mængde $A$ og lad $G = (A, R)$ være den orienterede graf der repræsenterer $R$.

- $R$ er refleksiv hvis og kun hvis $G$ har en loop på hvert punkt.

- $R$ er symmetrisk hvis og kun hvis der for enhver kant $(a, b)$ i $G$ er en kant $(b, a)$ i $G$.




- $R$ er transitiv hvis og kun hvis $G$ opfylder at når der er en orienteret vej fra $a$ til $b$ så er kanten $(a, b)$ også i $G$.



Lad $R$ være en relation på en mængde $A$
og lad $M_R$ være matricen der repræsenterer $R$.

- $R$ er refleksiv hvis og kun hvis $M_R$ har 1'taller på alle diagonalindgange.

- $R$ er symmetrisk hvis og kun hvis $M_R$ er symmetrisk.

$$M_R^T = M_R$$

Den **refleksive afslutning** af en relation $R$ på mængden $A$ er den mindste refleksive relation på $A$, der indeholder $R$.

Den fås ved at tilføje $(a, a)$ til $R$ for alle $a \in A$.

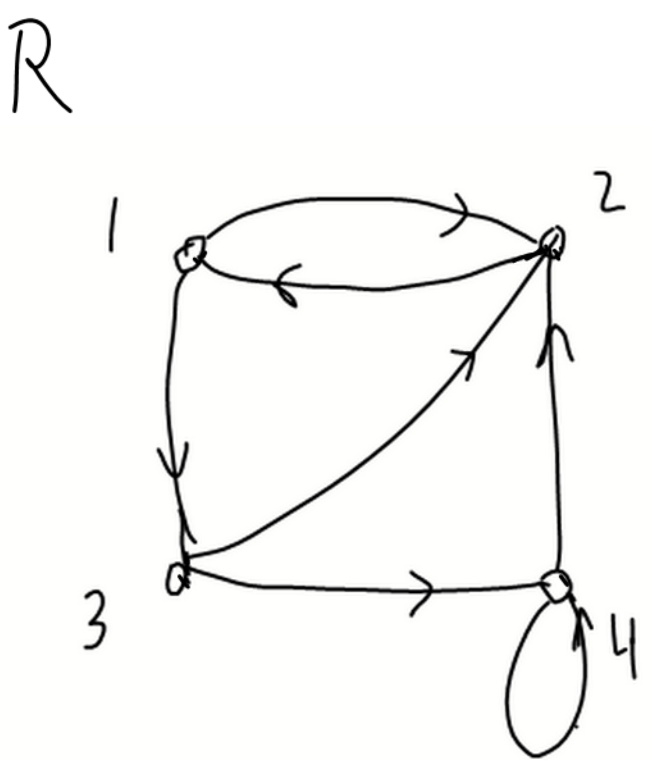
Den **symmetriske afslutning** af en relation $R$ på mængden $A$ er den mindste symmetriske relation på $A$, der indeholder $R$.

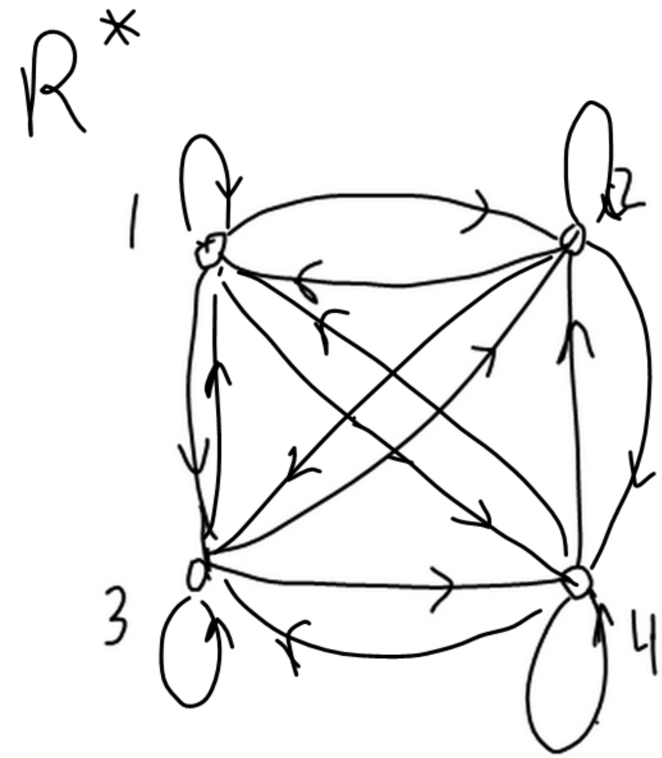
Den fås ved at tilføje $(b, a)$ til $R$ for alle $(a, b) \in R$.

Den **transitive afslutning** af en relation $R$ på mængden $A$ er den mindste transitive relation på $A$, der indeholder $R$.

Den transitive afslutning af $R$ er relationen $R^*$ hvor

$$R^* = \{(a, b) \mid \text{grafen der repræsenterer } R \text{ har en vej fra } a \text{ til } b\}.$$



0 − 1 **matricer.**

Bitoperationer $\vee$ og $\wedge$ er defineret ved

$$0 \vee 0 = 0 \quad 0 \vee 1 = 1 \quad 1 \vee 0 = 1 \quad 1 \vee 1 = 1,$$

$$0 \wedge 0 = 0 \quad 0 \wedge 1 = 0 \quad 1 \wedge 0 = 0 \quad 1 \wedge 1 = 1.$$

Lad $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ være $n \times n$, 0 − 1 matricer.

$S = [s_{ij}] = A \vee B$ defineres ved $s_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.
(Eller bestem den sædvanlige matrix sum $A + B$ og erstat alle 2'taller med 1 for at få $A \vee B$.)

$T = [t_{ij}] = A \wedge B$ defineres ved $t_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$.

$P = [p_{ij}] = A \odot B$ defineres ved

$$p_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}).$$

(Eller bestem det sædvanlige matrix produkt $\underline{AB}$ og erstat alle tal større end 1 med 1 for at få $\underline{A \odot B}$.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \odot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lad $R$ og $S$ være relationer på mængden $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Så er

$$M_{S \cup R} = M_S \vee M_R$$

$$M_{S \cap R} = M_S \wedge M_R$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = M_R^{[2]}$$

$M_R^{[n]}$ defines rekursivt:

$$M_R^{[1]} = M_R$$

$$M_R^{[n]} = M_R^{[n-1]} \odot M_R \quad \text{for } n \geq 2$$

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \ldots$$

Warshalls algoritme:

Beregning af den transitive afslutning $R^*$ af $R$ Side 585

**procedure** Warshall ($M_R$: $n \times n$, $\{0, 1\}$ matrix)

$W := M_R$ $\{W = [w_{ij}]\}$

$k := 0$

**while** $k < n$

  $k := k + 1$

  **for** $i := 1$ **to** $n$

    **for** $j := 1$ **to** $n$

      **if** $w_{ik} = 1 \wedge w_{kj} = 1$ **then** $w_{ij} := 1$

$\{W = M_{R^*}\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$k = 1, \quad i = \cancel{1}\ \cancel{2}\ 3, \qquad k = 2, \quad i = 1 \quad j = \cancel{1}\ 3$

$i = \cancel{2}\ 3$

$\vdots$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.5

En relation $\sim$ på en mængde $A$ siges at være en **ækvivalensrelation** hvis

- $\sim$ er refleksiv,
- $\sim$ er symmetrisk og
- $\sim$ er transitiv.

Hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på $A$ så defineres for ethvert $a \in A$ **ækvivalensklassen**

$$[a] = \{s \in A \mid a \sim s\}.$$

Sætning Enten [a] = [b] eller $[a] \cap [b] = \emptyset$

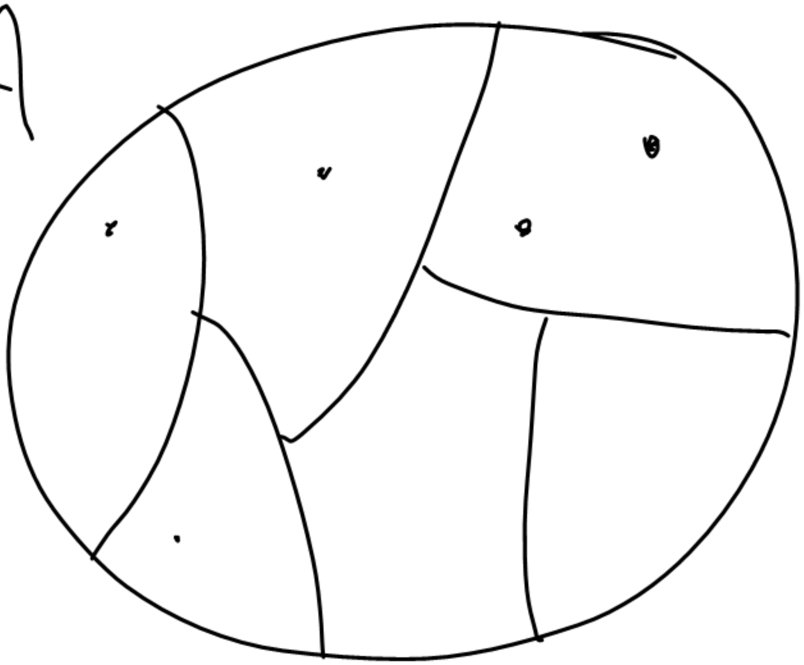
$A$ = mængde af personer

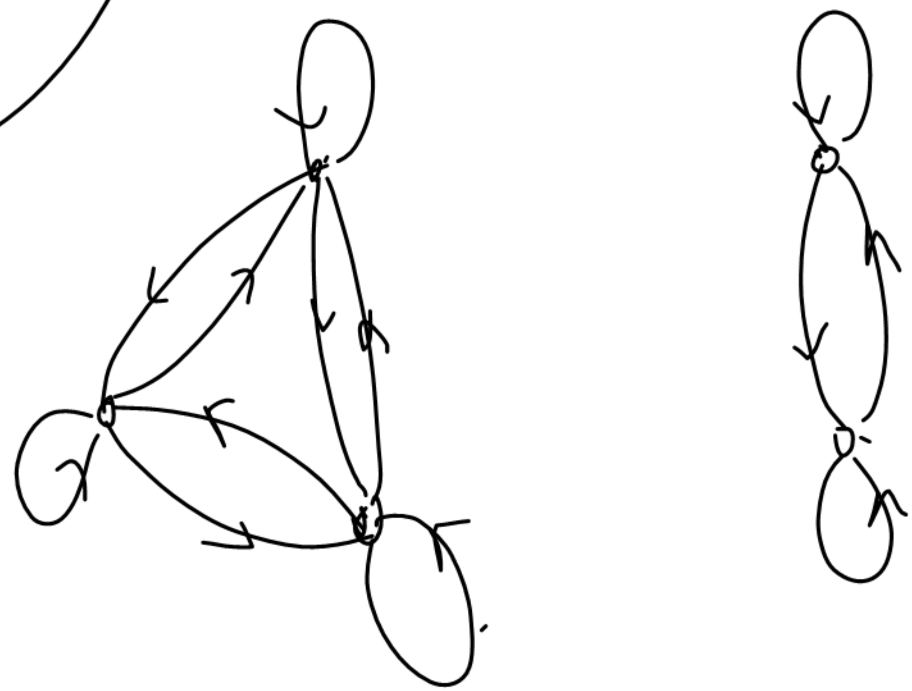
$a \sim b$ hvis $a$ og $b$ har fødselsdag samme ugedag

Ækvivalensklasse

personer, der har fødselsdag mandag
tirsdag
⋮

A





Ækvivalensrelation

Hvis $A$ er mængde og hvis $K$ er en mængde af ikke-tomme delmængder af $A$ som opfylder at hvert element i $A$ tilhører præcis én af mængderne i $K$ så siger vi at $K$ er en **klassedeling** af $A$ og mængderne i $K$ kaldes klasser.

Hvis $A$ er en mængde med klassedeling $K$ så er relationen $\sim$ på $A$ defineret

$$a \sim b \Leftrightarrow \ a \text{ og } b \text{ tilhører samme klasse i } K$$

en ækvivalensrelation.

Omvendt, hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på $A$ så udgør de forskellige ækvivalensklasser en klassedeling af $A$.

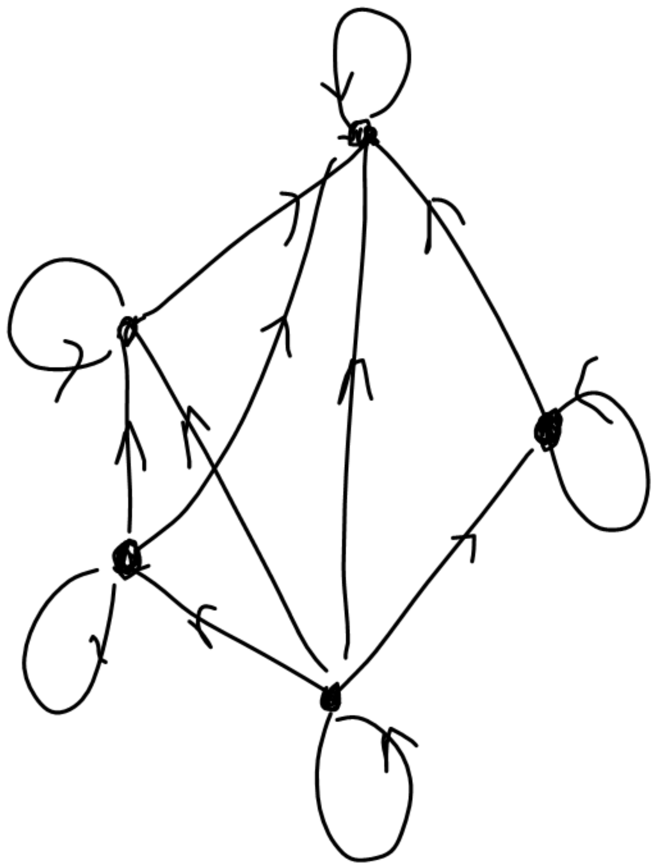
9.6

En relation $\preccurlyeq$ på $A$ siges at være en **partiel ordning** hvis

- $\preccurlyeq$ er refleksiv,
- $\preccurlyeq$ er antisymmetrisk og
- $\preccurlyeq$ er transitiv.

$(A, \preccurlyeq)$ siges da at være en partielt ordnet mængde (poset).

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde, der for alle $x, y \in A$ opfylder at enten $x \preccurlyeq y$ eller $y \preccurlyeq x$, så siger vi at ordningen er fuldstændig (eller total eller lineær).



Partiel ordning

Eksempler:

$(\mathbb{R}, \leq)$ er en partielt ordnet mængde. Denne ordning er fuldstændig.

enten er $a \leq b$ eller $b \leq a$

$(\mathbb{Z}, |)$ er en partielt ordnet mængde. Ordningsrelationen er "går op i".

$(P(S), \subseteq)$ er en partielt ordnet mængde, hvor $S$ er en vilkårlig mængde.

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde og $B \subseteq A$ så er $(B, \preccurlyeq)$ også en partielt ordnet mængde.