Eksamen i Diskret Matematik

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

11. juni 2014, 9.00–13.00

Tilladte hjælpemidler: Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMER: ______________________________

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (6%).

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen), hvis alle parenteser ganges ud i udtrykket $(2x - y)^4$.

Opgave 2 (8%).

Find vidner, der viser at $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5$ er $O(x^3)$.

Opgave 3 (12%).

1. Benyt Euklids algoritme til at bestemme den største fælles divisor af 46 og 21.
2. Find hele tal s og t som opfylder at $\gcd(46, 21) = s \cdot 46 + t \cdot 21$.
3. Find alle hele tal x som opfylder at

$$x \equiv 2 \pmod{46} \quad \text{og} \quad x \equiv 1 \pmod{21}.$$

Opgave 4 (9%).

Bevis ved induktion at

$$\sum_{i=1}^{n} (4i + 1) = 2n^2 + 3n,$$

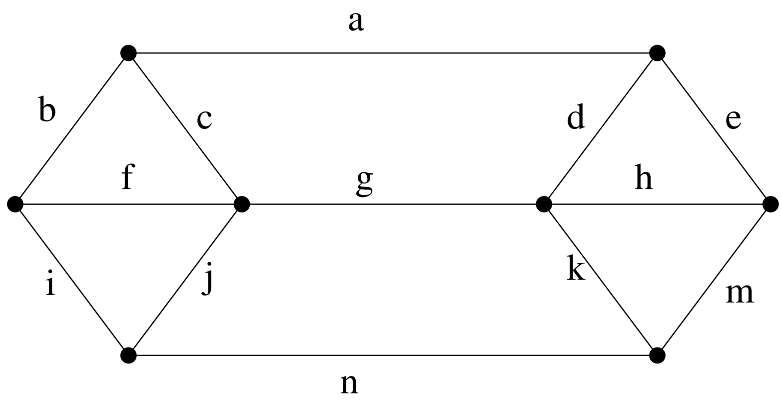
for ethvert positivt helt tal n.

Opgave 5 (6%).

1. Konstruér en sandhedstabel for det sammensatte udsagn

$$(p \land \neg q) \to (r \lor q).$$

2. Er det sammensatte udsagn i spørgsmål 1 en tautologi?



Figur 1: En graf G der betragtes i opgave 6.

Opgave 6 (10%).

En graf G med 13 kanter er vist i Figur 1. Kanterne i G har vægte givet ved følgende tabel

Kant	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
Vægt	1	1	3	3	6	4	5	6	2	4	2	7	2

1. Find ved hjælp af Prims algoritme et minimum udspændende træ S i G. Skriv kanterne i S i den rækkefølge som Prims algoritme tilføjer dem til S. (Hvis der er flere muligheder skal der kun angives én mulig rækkefølge.)

2. Find ved hjælp af Kruskals algoritme et minimum udspændende træ T i G. Skriv kanterne i T i den rækkefølge som Kruskals algoritme tilføjer dem til T. (Hvis der er flere muligheder skal der kun angives én mulig rækkefølge.)

Opgave 7 (9%).

Lad $A = \{a, b, c, d\}$ og lad $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, b)\}$ være en relation på A.

1. Tegn den orienterede graf, der repræsenterer R.

2. Bestem den transitive afslutning R^* af R.

3. Bestem en matrix $\mathbf{M}_{R^*}$, der repræsenterer R^*.

Opgave 8 (10%).

En mængde S er defineret rekursivt ved

Basisskridt: $0 \in S$

Rekursionsskridt: hvis $a \in S$ så er $a + 3 \in S$ og $a + 5 \in S$.

1. Bestem mængden $S \cap \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 < a < 12\}$.
2. Bevis at ethvert helt tal $a \geq 8$ er indeholdt i S.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (10%).

Lad $f(x) = (x^2 + 5x + 3)(x + 2\log x)$, for $x > 0$. Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

1. $f(x)$ er $O(x^4)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

2. $f(x)$ er $O(x^3)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

3. $f(x)$ er $O(x^2)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

4. $f(x)$ er $O(x^3 \log x)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

5. $f(x)$ er $O(x^2 \log x)$.

   ☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 10 (6%).

Lad $A = \{1, 3, 5\}$ og $B = \{3, 4, 5\}$ være mængder.

1. Hvad kardinaliteten af potensmængden $\mathcal{P}(A \cup B)$

   ☐ 4 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 32 ☐ 64

2. Hvilke af følgende er elementer i $A \times B$?

   ☐ $\{1, 3\}$ ☐ $(1, 3)$ ☐ $(4, 5)$ ☐ $(5, 5)$

Opgave 11 (8%).

Betragt følgende algoritme:

Procedure sum(n: positivt heltal)
$s := 0$
for $i := 1$ **to** n
  for $j := 1$ **to** i
    $s := s + j$
return s

1. Antag at procedure sum startes med input $n = 4$. Hvilket tal returneres så af algoritmen?

   ☐ 10 ☐ 20 ☐ 40 ☐ 45

2. Worst-case tids kompleksiteten af procedure sum er:

   ☐ $O(n)$ ☐ $O(n \log n)$ ☐ $O(n^{3/2})$ ☐ $O(n^2)$

Opgave 12 (6%).

Lad

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

være en matrix-repræsentation af en relation R på en mængde A. Besvar de følgende 3 sand/falsk opgaver:

1. R er refleksiv.

   ☐ Sand ☐ Falsk

2. R er symmetrisk.

   ☐ Sand ☐ Falsk

3. R er antisymmetrisk.

   ☐ Sand ☐ Falsk