

DMat-16

Definition.

Et træ er en sammenhængende ikke-orienteret graf uden simple kredse.

En skov er en ikke-orienteret graf uden simple kredse.

Et træ er altså en sammenhængende skov.

En skov er en graf hvor hver sammenhængskomponent er et træ.

Egenskaber.

Hvis T er en ikke-orienteret graf med n punkter så er følgende udsagn ækvivalente:

- T er et træ.
- For ethvert par af punkter u og v i T er der en entydig simpel vej fra u til v i G .
- T er sammenhængende og har $n - 1$ kanter.
- T er uden simple kredse og har $n - 1$ kanter.

Træ med rod.

Et træ med rod er m -ært hvis hvert punkt har højst m børn.

Hvis hvert punkt har enten ingen eller præcis m børn så siges træet at være fuldt m -ært.

Binær betyder 2-ær.

Højden h af et træ mod rod er den største afstand mellem roden og et af bladene.

Sætning 5. Et m -ært træ med højde h har højst m^h blade.

Sætning 3+4. Et fuldt m -ært træ med i indre punkter, ℓ blade og i alt $n = i + \ell$ punkter opfylder:

$$n = mi + 1 = \frac{m\ell - 1}{m - 1} \text{ og } i = \frac{\ell - 1}{m - 1}$$

Definition.

Lad G være en ikke-orienteret graf.

Hvis T er et træ, som er delgraf af G og indeholder alle G 's punkter så siger vi at T er et udspændende træ i G .

Sætning.

En ikke-orienteret graf G har et udspændende træ
hvis og kun hvis
 G er sammenhængende.

Procedure Prim (G : vægtet graf med n punkter)

$T :=$ træ bestående af ét punkt

for $i := 1$ **to** $n - 1$

$e :=$ kant med minimal vægt mellem

et punkt i T og et punkt ikke i T

Tilføj e og endepunkt til T

{ T er et minimum vægt udspændende træ }

Procedure Kruskal(G : vægtet graf)

sorter G 's kanter e_1, \dots, e_m efter vægt så $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$.

$T :=$ skov uden kanter

for $i := 1$ **to** m

if $T \cup \{e_i\}$ ikke har simpel kreds **then**

$T := T \cup \{e_i\}$

{ T er et minimum vægt udspændende træ. }

Eksempel 1.

G : komplet graf med punkter v_1, \dots, v_6 .

Kanterne har vægt angivet i følgende tabel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prims algoritme kan vælge følgende kanter:

$\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}$.

Eksempel 1, fortsat.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kanterne sorteret efter vægt:

$\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$,
 $\{v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_6\}$.

De røde kanter vælges af Kruskals algoritme