DMat-18

To mængder A og B har samme kardinalitet ($|A| = |B|$) hvis der findes en bijektiv funktion (one-to-one correspondence) $A \mapsto B$.

Hvis $|A| = |\{1, 2, \ldots, n\}|$ hvor $n \in \mathbb{Z}^+$ så har A kardinalitet n, skrives $|A| = n$.

Altså:
hvis der findes en bijektiv funktion $\{1, 2, \ldots, n\} \mapsto B$ så er $|B| = n$.

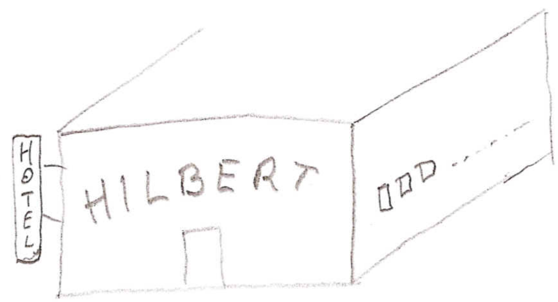
$|\emptyset| = 0$.

Hvis $|A| = n \in \mathbb{N}$ så siger vi at A er endelig. Ellers er A uendelig.

Hvis $|A| = |\mathbb{Z}^+|$ så siger vi at A har kardinalitet alef-0, $|A| = \aleph_0$.

Hvis A er endelig eller $|A| = \aleph_0$ så siger vi at A er tællelig.
Ellers er A overtællelig.

Hvis mængden A har samme kardinalitet som intervallet $[0, 1]$ så betegnes kardinaliteten af A som $|A| = c$.



Hotel Hilbert har uendeligt mange værelser numereret $1, 2, 3, \ldots$.
Alt er optaget.
Der ankommer en ny gæst.
Flyt gæsten i værelse i til værelse $i+1$, for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.
Værelse 1 er ledigt til ny gæst.

Eksempler på mængder med kardinalitet $\aleph_0$:

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

Enhver uendelig delmængde af $\mathbb{Q}$

Σ^*, hvor Σ er et endeligt alfabet.

$A \cup B$ og $A \times B$, hvor $|A| = |B| = \aleph_0$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, hvor $|A_i| = \aleph_0$ for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.

Mængden af alle endelige delmængder af $\mathbb{Z}^+$.

Eksempler på mængder med kardinalitet c:

$\mathbb{R}$

Ethvert interval $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, hvor $a < b$.

$\mathbb{R}^n$, hvor $n \in \mathbb{Z}^+$

$P(\mathbb{Z}^+)$

Produktregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan opdeles i et

  valg af ét af n_1 elementer

efterfulgt af

  valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 n_2$ elementer.

Sumregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan udføres som enten

  valg af ét af n_1 elementer

eller

  valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 + n_2$ elementer.

Skuffeprincippet

Hvis mindst $k+1$ objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst to objekter.

Hvis N objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objekter.

S: en mængde med n elementer. $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n$.

En r-permutation af S er en følge af r forskellige elementer fra S: $s_1, s_2, \ldots, s_r$, hvor rækkefølge har betydning.

En r-kombination af S er en mængde af r forskellige elementer fra S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ hvor rækkefølgen er uden betydning.

Antal r-permutation af S er

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Antal r-kombinationer af S er

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$