2.3: Funktioner

Definition. En funktion f fra en mængde A til en mængde B, skrives $f : A \mapsto B$, knytter til hvert element $x \in A$ et entydigt element $f(x) \in B$.

A kaldes definitionsmængden (domænet) for f.
B kaldes (codomænet) for f.

For $S \subseteq A$ kaldes $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ billedet (image) af S.

$f(A)$ kaldes billedmængden (range) af f.

Lad $f : A \mapsto B$ være en funktion, hvor A og B er vilkårlige mængder.

f siges at **enentydig** eller **injektiv** (one-to-one, $1-1$) hvis

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A((f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Dette er ækvivalent med

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A((x_1 \neq x_2) \rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

f siges at være **på** eller **surjektiv** (onto) hvis

$$\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b).$$

Hvis f er injektiv og surjektiv så siger vi at f er **bijektiv**.

Sammensat funktion:

Hvis $f : A \mapsto B$ og $g : B \mapsto C$
så er $g \circ f : A \mapsto C$ funktionen, der opfylder $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Hvis $f : A \mapsto B$ er bijektiv så findes der for ethvert element $b \in B$ et entydigt element $a \in A$ som opfylder $f(a) = b$. Dette entydige element skrives $a = f^{-1}(b)$.
Så er $f^{-1} : B \mapsto A$ også en funktion. Den kaldes f's **inverse funktion**.

$f^{-1} \circ f : A \mapsto A$ og $f \circ f^{-1} : B \mapsto B$ er funktioner der opfylder $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, for alle $a \in A$ og $(f \circ f^{-1})(b) = b$ for alle $b \in B$.

Grafen af en funktion $f : A \mapsto B$ er mængden

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

som er en delmængde af $A \times B$.

En delmængde F af $A \times B$ er grafen for en funktion hvis den opfylder:
for ethvert $a \in A$ findes der et *entydig* $b \in B$ så $(a, b) \in F$.

For $x \in \mathbb{R}$ er
$\lceil x \rceil$ det mindste hele tal, større end eller lig med x (x rundet op).
$\lfloor x \rfloor$ det største hele tal, mindre end eller lig med x (x rundet ned).