Gradientvektor

For en funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ af n variable er gradientvektoren af f i punktet P defineret ved

$$\nabla \mathbf{f}(P) = \langle f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \ldots, f_{x_n}(P) \rangle.$$

Så for $n = 3$ er $f(x, y, z)$ en funktion af 3 variable med gradientvektor i punktet (a, b, c):

$$\nabla \mathbf{f}(a, b, c) = \langle f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c) \rangle.$$

Hvis $F(x, y, z)$ er kontinuert differentiabel og (a, b, c) er et punkt hvor $F(a, b, c) = 0$ og $\nabla \mathbf{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ så har fladen med ligning $F(x, y, z) = 0$ tangentplan i punktet (a, b, c) med ligning

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0.$$

Gradientvektoren er altså normalvektor til tangentplanen.

Hvis $F(x, y)$ er kontinuert differentiabel og (a, b) er et punkt hvor $F(a, b) = 0$ og $\nabla \mathbf{F}(a, b) \neq \mathbf{0}$ så har kurven med ligning $F(x, y, z) = 0$ tangent i punktet (a, b) med ligning

$$F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)(y - b) = 0.$$

Retninsafledet

Hvis f er en funktion af n variable og $\mathbf{u}$ en vektor med længde $|\mathbf{u}| = 1$ så defineres den retningsafledede af f i punktet $\mathbf{x}$ i retning $\mathbf{u}$ som

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Den retningsafledede beregnes:

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{u}.$$

Den retningsafledede angiver hvor hurtigt funktionen vokser når man gå i $\mathbf{u}$'s retning.

Den retningsafledede er størst når $\mathbf{u}$ peger i samme retning som $\nabla \mathbf{f}(P)$.
Den maksimale værdi af den retningsafledede i punktet P er $|\nabla \mathbf{f}(P)|$.