Tredobbelte integraler

T: et område i rummet.

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV$$

defineres ved hjælp af Riemannsummer.

At T er z-simpel betyder at T kan udtrykkes som

$$T = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in R_{xy},\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\},$$

hvor R_{xy} er projektionen af T på xy-planen.

Integralet kan så udregnes som itereret integral:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_{R_{xy}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dx\,dA.$$

x-simpel og y-simpel: tilsvarende.

Integration i cylinder-koordinater

Hvis T i cylinder-koordinater kan beskrives som

$\{(r, \theta, z) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta),\ z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta)\}$,

så kan integralet udregnes som

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Integration i sfæriske koordinater

Hvis T i sfæriske koordinater kan beskrives som

$$\{(\rho,\phi,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \gamma \le \phi \le \delta,\ \rho_1(\phi,\theta) \le \rho \le \rho_2(\phi,\theta)\},$$

så kan integralet udregnes som

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV =$$

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$