Diskret Matematik

Eksamen: skriftlig, med karakter efter 7-trinsskalen.

Der må ikke medtages PC, lommeregner eller mobiltelefon.

Bøger og notater må benyttes.

DMat-02

Et udsagn (proposition) er “noget”, der enten er sandt (T) eller falsk (F).

$p, q, r, \ldots$ bruges til betegne en udsagnsvariabel, et udsagn eller et sammensat (compound) udsagn.

Et sammensat udsagn er opbygget fra andre udsagn ved hjælp logiske konnektiver, som f.eks. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$, der kan defineres ved sandhedstabeller:

p	$\neg p$ (ikke p)
T	F
F	T

		p og q	p eller q		hvis p så q	p hvis og kun hvis q
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \bigoplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

Konnektiverne evalueres i følgende rækkefølge: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Hvis evalueringen ønskes foretaget i en anden rækkefølge skal der benyttes parenteser.

Et sammensat udsagn hvori der indgår et antal variable
siges at være en tautologi
hvis det er sandt for alle sandhedsværdier af de variable.
(Sandhedstabellen for udsagnet har altså T i alle rækker.)

To sammensatte udsagn p og q siges at være ækvivalente,
skrives $p \equiv q$ (eller $p \Leftrightarrow q$),
hvis $p \leftrightarrow q$ er en tautologi.
(Sandhedstabellerne for to udsagn er altså ens.)

Eksempler på ækvivalente udsagn:

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (de Morgans lov)

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (de Morgans lov)
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributiv lov)
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributiv lov)
- $(p \leftrightarrow q) \equiv \neg(p \oplus q)$
- $(p \oplus q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Metoder til at bevise $p \to q$:

- Direkte bevis: Antag p er sand og argumentér for at så er q også sand.

- Bevis ved kontraposition (indirekte bevis): Giv et direkte bevis for det kontrapositive udsagn: $\neg q \to \neg p$.
  Vi ved at $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

- Bevis ved modstrid (indirekte bevis): Antag $\neg(p \to q)$ og benyt dette til at komme til en modstrid.
  $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

Bevis ved modstrid er desuden særdeles velegnet til at bevise at noget ikke eksisterer.