DMat-21

Skuffeprincippet

Hvis mindst $k + 1$ objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst to objekter.

Hvis N objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objekter.

S: en mængde med n elementer. $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n$.

En r-permutation af S er en følge af r forskellige elementer fra S: $s_1, s_2, \ldots, s_r$, hvor rækkefølge har betydning.

En r-kombination af S er en mængde af r forskellige elementer fra S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ hvor rækkefølgen er uden betydning.

Antal r-permutation af S er

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Antal r-kombinationer af S er

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Sætning

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Bevis (kombinatorisk)

Antal k-kombination af en mængde med $n+1$ elementer= antal k-kombinationer, der indeholder et element x + antal k-kombinationer, der ikke indeholder x.

Pascals trekant:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{0}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

I siderne står 1. Andre tal er sum af de to tal over tallet. Trekanten er symmetrisk om en lodret akse gennem midten da $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Pascals trekant:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Binomial sætningen.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) =$
$xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy =$
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Koefficienterne 1, 3, 3, 1 fås fra række 3 i Pascals trekant.
(Øverste række er række 0.)

Korollar.

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

2^n er antal delmængder af en mængde med n elementer.
$\binom{n}{i}$ er antal delmængder med i elementer.

Korollar.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$$

Antal delmængder med lige antal elementer $= 2^{n-1}$.
Antal delmængder med ulige antal elementer $= 2^{n-1}$.