DMat-23

Lad A og B være mængder.
En (binær) relation fra A til B er en delmængde $R \subseteq A \times B$.
En (binær) relation på A er en delmængde $R \subseteq A \times A$.
$(a, b) \in R$ skrives aRb.

En funktion fra A til B er en relation f fra A til B, der opfylder at for ethvert element $a \in A$ findes der præcis ét element $b \in B$ sådan at afb (skrives $f(a) = b$).
Hvis f desuden opfylder at for ethvert element $b \in B$ findes der præcis ét element $a \in A$ sådan at afb, så er f bijektiv.

A relation R på en mængde A siges at være

- refleksiv hvis aRa for alle $a \in A$
- symmetrisk hvis $aRb \Leftrightarrow bRa$
- antisymmmetrisk hvis $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitiv hvis $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

En relation R på en (endelig) mængde A kan repræsenteres af en orienteret graf med punktmængde A og kantmængde R; altså en kant fra a til b hvis aRb.

Hvis relationen er symmetrisk kan de to orienterede kanter (a, b) og (b, a) erstattes af en ikke-orienteret kant $\{a, b\}$.

En relation er transitiv hvis og kun hvis
den opfylder at for ethvert par af punkter (a, b) hvor der er en vej af længde mindst 1 fra a til b gælder at aRb.

Transitiv afslutning af en relation R på en mængde A.

Hvis S_1 og S_2 er transitive relationer på A så er $S_1 \cap S_2$ også en transitiv relation på A.

Der findes en transitiv relation S på A så $R \subseteq S$, f.eks. $S = A \times A$.

Den transitive afslutning af R er den mindste transitive relation S på A som opfylder at $R \subseteq S$.
S er altså fællesmængden af alle relationer, der indeholder R.

På samme måde kan man definere refleksiv afslutning og symmetrisk afslutning (men *ikke* antisymmetrisk afslutning).

Hvis R er en relation på A så er R^* relationen på A der opfylder at aR^*b hvis og kun hvis
grafen der repræsenterer R har en vej fra a til b af længde mindst 1.

R^* er den transitive afslutning af R.

Hvis R er en relation fra A til B
og S er en relation fra B til C
så defineres en relation $S \circ R$ fra A til C ved

$$a(S \circ R)c \Leftrightarrow \exists b \in B(aRb \wedge bSc).$$

Hvis R er en relation på så defineres R^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ ved
$R^1 = R$ og $R^{n+1} = R^n \circ R$, for $n \geq 1$.

$(a, b) \in R^n$ hvis og kun hvis der er en vej af længde n fra a til b i grafen der repræsenterer R.

En relation R fra $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ til $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$ kan repræsenteres af en $s \times t$ matrix $M_R = [m_{ij}]$, hvor

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis } a_i R b_j \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Hvis $M = [m_{ij}]$ er en $r \times s$ matrix og $N = [n_{ij}]$ er en $s \times t$ matrix og både M og N er $\{0, 1\}$-matricer så defineres en $r \times s$ matrix $M \odot N = [p_{ij}]$ ved

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis der findes } \ell \text{ så } \ m_{i\ell} = 1 \wedge n_{\ell j} = 1 \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Så er

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$