DMat-24

R: en relation på $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ repræsenteret af matricen M_R.

Bestem matricen M_{R^*}, der repræsenterer relationen

$$R^* = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{der findes en vej fra } a \text{ til } b\}.$$

procedure Warshall (M_R: $n \times n$, $\{0,1\}$ matrix)
$W := M_R \qquad \{W = [w_{ij}]\}$
$k := 0$
while $k < n$
begin
  $k := k + 1$
  for $i := 1$ **to** n
    for $j := 1$ **to** n
      if $w_{ik} = 1 \land w_{kj} = 1$ **then** $w_{ij} := 1$
end
$\{W = M_{R^*}\}$

Invariant for while-løkken: $w_{ij} = 1$ hvis der findes en vej af længde mindst 1 fra a_i til a_j hvor alle indre punkter $\in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Ellers er $w_{ij} = 0$.

En relation $\sim$ på en mængde A siges at være en ækvivalensrelation hvis

- $\sim$ er refleksiv,
- $\sim$ er symmetrisk og
- $\sim$ er transitiv.

Hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så defineres for ethvert $a \in A$ ækvivalensklassen

$$[a] = \{s \in A \mid a \sim s\}.$$

Hvis A er mængde og hvis K er en mængde af ikke-tomme delmængder af A (altså: $K \subseteq P(A)$, $\emptyset \notin K$) som opfylder at hvert element i A tilhører præcis én af mængderne i K så siger vi at K er en klassedeling af A og mængderne i K kaldes klasser.

Hvis A er en mængde med klassedeling K så er relationen $\sim$ på A defineret

$$a \sim b \Leftrightarrow \ a \text{ og } b \text{ tilhører samme klasse i } K$$

en ækvivalensrelation.

Omvendt, hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så udgør de forskellige ækvivalensklasser en klassedeling af A.

Eksempler på ækvivalensrelationer:

$\equiv \pmod{m}$ er en ækvivalensrelation på $\mathbb{Z}$ for ethvert $m \in \mathbb{Z}^+$.

Hvis S_1 og S_2 er mængder, $s \in S_1$ og A er en mængde af funktioner fra S_1 til S_2 så kan vi definere en ækvivalen-srelation $\sim$ på A ved

$$f \sim g \Leftrightarrow f(s) = g(s).$$

For ethvert $t \in S_2$ er følgende en ækvivalensklasse:

$$\{f \in A \mid f(s) = t\}.$$

Hvis S er en mængde så kan vi definere en ækvivalensrelation $\sim$ på $P(S)$ ved

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

($P(S)$ er potensmængden af S, altså mængden af alle delmængder af S.)
Hvis a, b, c er tre forskellige elementer i S så består $[\{a, b, c\}]_\sim$ af alle delmængder af S med tre elementer.

En relation $\preccurlyeq$ på A siges at være en partiel ordning hvis

- $\preccurlyeq$ er refleksiv,
- $\preccurlyeq$ er antisymmetrisk og
- $\preccurlyeq$ er transitiv.

$(A, \preccurlyeq)$ siges da at være en partielt ordnet mængde (poset).

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde, der for alle $x, y \in A$ opfylder at enten $x \preccurlyeq y$ eller $y \preccurlyeq x$, så siger vi at ordningen er fuldstændig (eller total eller lineær).

Eksempler:

$(\mathbb{R}, \leq)$ er en partielt ordnet mængde. Denne ordning er fuldstændig.

$(\mathbb{Z}, |)$ er en partielt ordnet mængde. Ordningsrelationen er "går op i".

$(P(S), \subseteq)$ er en partielt ordnet mængde, hvor S er en vilkårlig mængde.

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde og $B \subseteq A$ så er $(B, \preccurlyeq)$ også en partielt ordnet mængde.

Hasse-diagram for en partielt ordnet mængde $(A, \preccurlyeq)$, hvor A er endelig.

Tegn den orienterede graf, der repræsenterer relationen. Punkterne tegnes sådan at hvis $x \preccurlyeq y$ så tegnes y højere oppe end x.

Fjern alle loops.

Hvis $x \preccurlyeq y$ og $y \preccurlyeq z$ så fjern kanten fra x til z.

Fjern kanternes orientering (alle kanter er jo orienteret opad).

Den graf, der fremkommer, kaldes Hasse-diagrammet for $(A, \preccurlyeq)$.

Lad $(A, \preccurlyeq)$ være en partielt ordnet mængde.

$a \in A$ siges at være maksimal hvis $a \preccurlyeq x \Rightarrow x = a$.

$a \in A$ siges at være minimal hvis $x \preccurlyeq a \Rightarrow x = a$.

Lemma. Enhver endelig ikke-tom partielt ordnet mængde har et maksimalt element og et minimalt element.

procedure topological sort(($A, \preccurlyeq$): endelig partielt ordnet mængde)

$k := 1$
while $S \neq \emptyset$
begin
    $a_k :=$ et minimalt element i S
    $S := S - \{a_k\}$
    $k := k + 1$
end
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n$ opfylder at $a_i \preccurlyeq a_j \Rightarrow i \leq j.\}$