Prøve-Eksamen i Diskret Matematik

2. semester, Aalborg Universitet
xxxdag den xx. juni 2011, kl. 9.00–13.00.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter og lignende.
Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Bemærkninger: Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang. Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (7 %)

Der er givet to mængder:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\} \ \text{ og } \ B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 4\}.$$

Vis at A og B har samme kardinalitet.

Opgave 2 (9 %)

Lad $f(x) = 5x^2 + 7x + 4$. Vis at $f(x)$ er $O(x^2)$.

Opgave 3 (13 %)

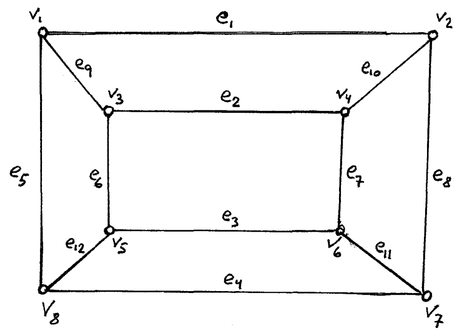
Betragt følgende algoritme:

Procedure talfølge(n: positivt helt tal)
$x := 1$
$y := 2$
$i := 1$
while $i < n$
begin
  $z := x + 6y$
  $y := x$
  $x := z$
  $i := i + 1$
end

1. Vis at følgende er en invariant for while-løkken

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = 3^i + (-2)^i \ \wedge \ y = 3^{i-1} + (-2)^{i-1}.$$

2. Hvad er værdien af x når algoritmen standser. Begrund dit svar.



Figur 1: Benyttes i opgave 4 og opgave 5.

Opgave 4 (13 %)

På figur 1 ses en graf G med punktmængde $\{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ og kantmængde $\{e_1, e_2, \ldots, e_{12}\}$. Kanterne er vægtet som angivet i følgende tabel.

Kant	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
vægt	7	5	3	1	4	6	6	4	1	1	2	2

I denne opgave skal man finde et minimum vægt udspændende træ i G.

1. Find ved hjælp af Kruskals algoritme et minimum vægt udspændende træ T i G. Angiv den rækkefølge kanterne tilføjes til T. (Hvis der er flere muligheder skal der kun angives én mulig rækkefølge.)

2. Find ved hjælp af Prims algoritme et minimum vægt udspændende træ T i G. Angiv den rækkefølge kanterne tilføjes til T. (Hvis der er flere muligheder skal der kun angives én mulig rækkefølge.)

Opgave 5 (7 %)

Lad G være grafen i figur 1.

1. Har G en Hamilton-kreds? Angiv en kreds eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

2. Har G en Euler-kreds? Angiv en kreds eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

Opgave 6 (6 %)

Udregn $(111 \cdot 222 + 333 \cdot 444) \mod 11$.

Opgave 7 (7 %)

Bestem den største fælles divisor af 65 og 85 og bestem hele tal s og t så $\gcd(65, 85) = s \cdot 65 + t \cdot 85$.

Opgave 8 (13 %)

En talfølge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_0 = 2$
- $a_k = \frac{k+2}{k} a_{k-1}$, for $k \geq 1$.

1. Bestem værdien af a_1, a_2 og a_3.
2. Vis at $a_k = k^2 + 3k + 2$, for alle $k \geq 0$. Hvilken bevisteknik benyttes?

Opgave 9 (8 %)

Find ved hjælp af den kinesiske restsætning alle hele tal x som opfylder

$$x \equiv 2 \pmod 4 \quad \wedge \quad x \equiv 3 \pmod 9.$$

Opgave 10 (11 %)

En mængde S, $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, er defineret rekursivt ved

- $(0, 0) \in S$,
- hvis $(a, b) \in S$ så er $(a + 1, b + 3), (a + 2, b + 2)$ og $(a + 3, b + 1)$ også i S.

1. Vis at $(4, 8) \in S$.
2. Vis ved strukturel induktion at 4 går op i $a + b$ for alle $(a, b) \in S$.

Opgave 11 (5 %)

Lad A, B og C være mængder med fem element hver, og antag at hver af mængderne $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ og $A \cap B \cap C$ har ét element. Hvor mange elementer er der i mængden $A \cup B \cup C$?

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.