Prøve i "Diskret Matematik"
For EVU efteråret 2010
17. januar 2011, i tidsrummet 9.00-13.00

Noter, papirkopier samt bøger, mapper og lignende må medtages. Der må ikke medtages lommeregner, computer eller mobiltelefon.
Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen og at mellemregninger medtages i passende omfang.
De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Opgave 1: (5 %) I denne opgave tilhører x og y mængden af heltal og p tilhører mængden af positive heltal.

1. Forklar med egne ord, hvad udsagnsfunktionen

$$\forall x \exists y \Big(\big(p \mid x\big) \vee \big(xy \equiv 1 \pmod{p}\big) \Big)$$

siger. Bemærk, at | betyder "går op i".

2. For hvilke p er udsagnsfunktionen sand?

Opgave 2: (4 %) Find vha. Euklids algoritme største fælles divisor mellem 60 og 42.

Opgave 3: (8 %) Find vha. den kinesiske restalgoritme alle heltal x så

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$
$$x \equiv 2 \pmod{4}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5}.$$

Opgave 4: (5 %) Benyt mængdebyggernotationen (set builder notation) og logiske ækvivalenser til at bevise

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Opgave 5: (4 %) Opskriv en sandhedstabel for udsagnet

$$p \to (q \to \neg r).$$

Opgave 6: (5 %)

1. Find potensmængden af $\{a, b, \emptyset\}$.
2. Find potensmængden af $\{a, \emptyset, a, b, \{\emptyset\}\}$.

Opgave 7: (7 %)

1. Giv en rekursiv definition af

$$T = \{s4 + t5 + u7 \mid s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{N}\}.$$

2. Giv et induktionsbevis for, at alle positive heltal større end eller lig 7 tilhører T.

Opgave 8: (8%) Lad $A = \{a, b, c, d\}$. Betragt relationen R på A givet vha. matricen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R transitiv?
2. Find den transitive aflukning af R
3. Argumenter for at relationen fra delspørgsmål 2 er en ækvivalensrelation og find de tilhørende ækvivalensklasser.

Opgave 9: (8 %) Lad $A = \{a, b, c, d, e\}$. Hvor mange ækvivalensrelationer findes der på A?

Opgave 10 (5 %)

1. Udregn $(1802 \cdot 1818181 + 18699 \cdot 4712) \mod 2$.
2. Udregn $(1802 \cdot 1818181 + 18699 \cdot 4712) \mod 3$.

Opgave 11 (6 %)

1. Find $3^{16} \mod 17$.
2. Find $3^{18} \mod 17$.
3. Find $3^{15} \mod 17$.

Opgave 12: (8 %) I denne opgave arbejdes der med komplette to-delte grafer $K_{n,m}$, med $n \geq 1$ og $m \geq 1$ (to-delt hedder "bipartite" på engelsk).

1. Opskriv en formel for antallet af kanter i $K_{n,m}$.
2. Eftervis formlen fra delspørgsmål 1 vha. et induktionsbevis.

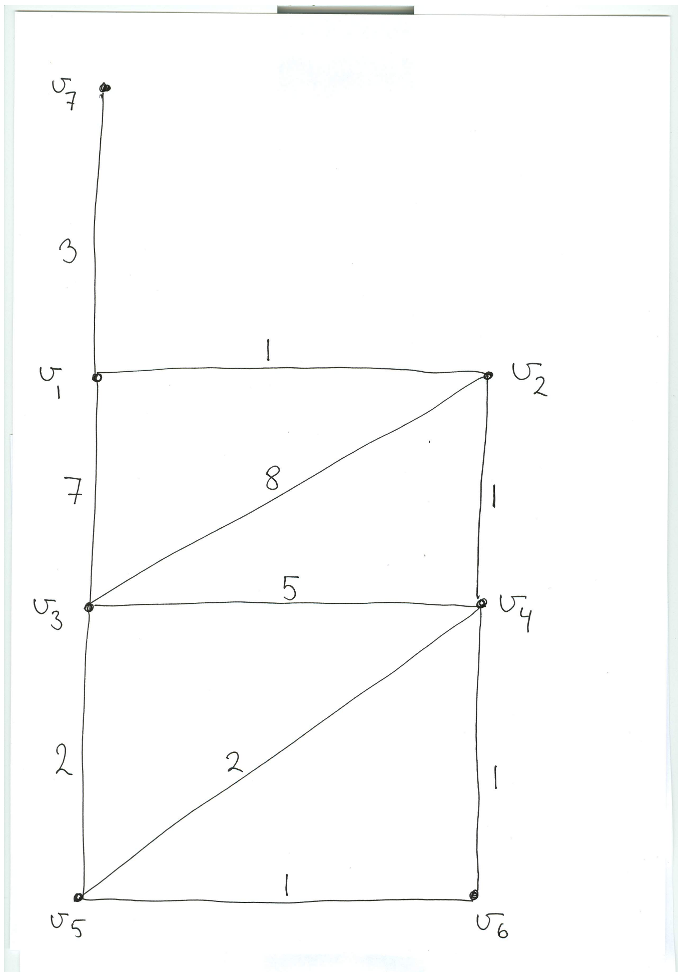
Opgave 13: (6 %) Løs rekurrensrelationen (differensligningen) $a_n = -a_{n-1} + 12a_{n-2}$ under bibetingelsen $a_0 = 5$, $a_1 = -6$.

Opgave 14: (8 %)

1. Find den binære ekspansion af 13 og 15.
2. Find multiplum (produktet) af de to tal fra delspørgsmål 1 vha. den hurtige multiplikationsalgoritme (Eksempel 4, side 475 i [Ros]).

Opgave 15: (6 %) I denne opgave arbejdes der med simple grafer $G = (V, E)$. Dvs. grafer uden multiple kanter og løkker. Lad $n = |V|$. Beskriv en algoritme, der vha. $\mathcal{O}(n^2)$ operationer afgør, om G er sammenhængende (connected).

Opgave 16: (7 %) Betragt grafen nedenfor, hvor kanterne er påført kantvægte. Find vha. Dijkstras algoritme en korteste vej fra v_3 til v_1.



God arbejdslyst
venligst Olav