Facit til eksamen i Diskret Matematik

Mandag den 15. august 2011, kl. 9.00–13.00.

Opgave 1

Hvis $x > 1$ så er $x^2 > x$ og $x^2 > 1$ og dermed er

$$|f(x)| = |3x^2 + 4x + 2| = 3x^2 + 4x + 2 < 3x^2 + 4x^2 + 2x^2 = 9x^2 = 9|x^2|.$$

Så med $K = 1$ og $C = 9$ er $|f(x)| < C|x^2|$ for alle $x > K$.

Opgave 2

p	q	r	$p \to q$	$\neg q$	$\neg q \wedge r$	$(p \to q) \vee (\neg q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

Opgave 3

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5+6+7-2-3-4+2 = 11.$$

Opgave 4

1. $88 = 1 \cdot 51 + 37$
   $37 = 88 - 51$
   $51 = 1 \cdot 37 + 14$
   $14 = 51 - 37 = 51 - (88 - 51) = 2 \cdot 51 - 88$
   $37 = 2 \cdot 14 = 9$
   $9 = 37 - 2 \cdot 14 = (88 - 51) - 2(2 \cdot 51 - 88) = 3 \cdot 88 - 5 \cdot 51$
   $14 = 1 \cdot 9 + 5$
   $5 = 14 - 9 = (2 \cdot 51 - 88) - (3 \cdot 88 - 5 \cdot 51) = 7 \cdot 51 - 4 \cdot 88$
   $9 = 1 \cdot 5 + 4$
   $4 = 9 - 5 = (3 \cdot 88 - 5 \cdot 51) - (7 \cdot 51 - 4 \cdot 88) = 7 \cdot 88 - 12 \cdot 51$
   $5 = 1 \cdot 4 + 1$
   $1 = 5 - 4 = (7 \cdot 51 - 4 \cdot 88) - (7 \cdot 88 - 12 \cdot 51) = 19 \cdot 51 - 11 \cdot 88$

   Altså $\gcd(51, 88) = 1 = 19 \cdot 51 - 11 \cdot 88$.

2. 51 har invers 19 modulo 88.

Opgave 5

1. $5^{11} \mod 11 = 5$ ifølge Fermats lille sætning (Theorem 3.7.5).
2. $4 \cdot 5^{11} + 3 \equiv 4 \cdot 5 + 3 \equiv 23 \equiv 1 \pmod{11}$. Altså $4 \cdot 5^{11} + 3 \mod 11 = 1$.

Opgave 6

En talfølge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_0 = 2$
- $a_n = 2a_{n-1} - 1$, for $n \geq 1$.

1. $a_1 = 2a_0 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
   $a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.
2. Vis at $a_n = 2^n + 1$ for alle $n \geq 0$.
   Bevis ved induktion.
   Basisskridt, $n = 0$: $a_0 = 2 = 2^0 + 1$. Sandt.
   Induktionsskridt: Lad $k \geq 0$ og antag $a_k = 2^k + 1$.
   Så er
   $$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^k + 1) - 1 = 2 \cdot 2^k + 1 = 2^{k+1} + 1.$$
   Påstanden er altså også sand for $n = k + 1$.
   Dermed er den sand for alle $n \geq 0$

Opgave 7

v		a	b	c	d	e	f	g	h	i	z
$L(v)$		0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	vælg $u = a$	0	1							6	100
	vælg $u = b$		1	2			7				
	vælg $u = c$			2	3				4		
	vælg $u = d$				3	9					12
	vælg $u = h$							8	4	5	
	vælg $u = i$					6				5	
	vælg $u = e$					6					
	vælg $u = f$						7				
	vælg $u = g$							8			11
	vælg $u = z$										11

Grafens punkter i rækkefølge bestemt voksende afstand fra **a** er den rækkefolge som punkterne tilføjes til S. Altså:

$$a, b, c, d, h, i, e, f, g, z$$

Opgave 8

Hvis Kruskals algoritme benyttes tilføjes kanterne f.eks. i denne rækkefølge:

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{e, i\}, \{h, i\}, \{c, h\}, \{f, g\}, \{g, z\}, \{g, h\}.$$

Hvis Prims algoritme benyttes (med start i a) tilføjes kanter f.eks. i denne rækkefølge:

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, h\}, \{h, i\}, \{e, i\}, \{g, h\}, \{f, g\}, \{g, z\}.$$

(Der er andre løsninger.)

Opgave 9

Vi bemærker at når vi første gang kommer til while-løkken er $x = 1, y = 0, i = 1$ og udsagnet er sandt.

1. Antag at udsagnet er sandt før et gennemløb af while-løkken. Altså

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = i \ \wedge \ y = i - 1.$$

Desuden antages det at $i < n$, altså $i \leq n - 1$ da $i \in \mathbb{N}$.
Variablenes værdier efter gennemløbet betegnes $i_{\text{ny}}, x_{\text{ny}}, y_{\text{ny}}$.
Vi får:
$x_{\text{ny}} = z = 2x - y = 2i - (i - 1) = i + 1$
$y_{\text{ny}} = x = i$
$i_{\text{ny}} = i + 1$
Dermed er $x_{\text{ny}} = i_{\text{ny}}$ og $y_{\text{ny}} = i_{\text{ny}} - 1$. Desuden er $i_{\text{ny}} \in \mathbb{N}$ og $i_{\text{ny}} = i + 1 \leq n$ da $i \leq n - 1$.

Udsagnet er altså sandt efter gennemløbet af while-løkken. Dette viser at udsagnet er en invariant.

2. Når algoritmen standser er invarianten sand, men $i < n$ er falsk. Dermed er $i = n$ og $x = i = n$.