Eksamen i Diskret Matematik

2. semester, Det teknisk-naturvidenskabelige fakultet, Aalborg Universitet

Mandag den 6. juni 2011, kl. 9.00–13.00.

Tilladte hjælpemidler: Bøger, noter og lignende.
Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
Bemærkninger: Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang. Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (6 %)

Der er givet to mængder:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{og} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x \leq 9\}.$$

Vis at A og B har samme kardinalitet.

Opgave 2 (9 %)

Vis at $f(x) = x^3 - 2x + 1$ er $O(x^3)$.

Opgave 3 (12 %)

Betragt følgende algoritme:

Procedure kvadrer(n: naturligt tal)
$s := 0, k := 0$
while $k < n$
begin
  $s := s + k$
  $k := k + 1$
  $s := s + k$
end

1. Vis at følgende udsagn er en invariant for while-løkken:

$$k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad k \leq n \quad \wedge \quad s = k^2.$$

2. Hvad er værdien af s når algoritmen standser.

Opgave 4 (6 %)

Hvad bliver resultatet (ifølge binomialsætningen) hvis alle parenteser ganges ud i udtrykket $(x - y)^5$.

Opgave 5 (7 %)

Bestem ved hjælp af Euklids algoritme den største fælles divisor af 54 og 66 og find hele tal s og t så

$$\gcd(54, 66) = s \cdot 54 + t \cdot 66.$$

Opgave 6 (12 %)

En talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_1 = 1, a_2 = 13$ og
- $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n \geq 2$.

1. Bestem værdien af a_3 og a_4.
2. Vis at $a_n \leq 3^n$ for alle $n \geq 3$.

Opgave 7 (10 %)

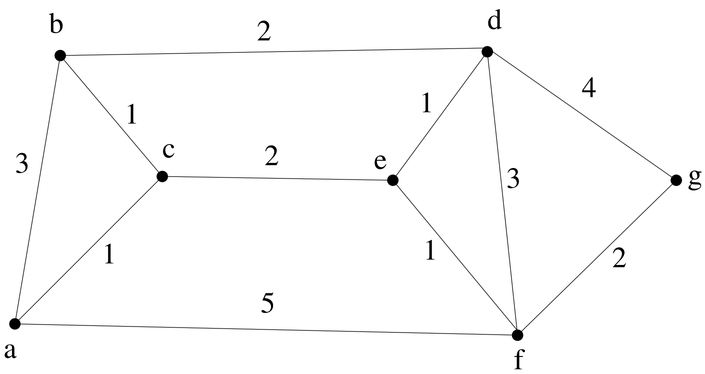
Et fuldt binært træ defineres som i Definition 6 på side 303 i Rosens bog. Antal punkter $n(T)$ i det fulde binære træ T bestemmes ved brug af en rekursiv formel på side 306 i Rosens bog.

Antallet $\ell(T)$ af blade i det fulde binære træ T opfylder følgende rekursive formel:

- Antal blade i et træ T, der kun består af en rod, er $\ell(T) = 1$.
- Hvis $T = T_1 \cdot T_2$ så er $\ell(T) = \ell(T_1) + \ell(T_2)$.

Vis ved strukturel induktion at ethvert fuldt binært træ opfylder

$$n(T) = 2\ell(T) - 1.$$



Figur 1: Benyttes i opgave 9, opgave 10 og opgave 11.

Opgave 8 (6 %)

Udregn $(1234 \cdot 4567 + 5555) \mod 10$.

Opgave 9 (10 %)

På figur 1 ses en vægtet graf G med punktmængde $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra a til g.

Opgave 10 (8 %)

Bestem ved hjælp af Kruskals algoritme et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1.

Opgave 11 (6 %)

Lad igen G være grafen i figur 1 med punktmængde $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. I denne opgave ses bort fra de angivne kantvægte.
Bestem en nabomatrix (adjacency matrix) for G.

Opgave 12 (8 %)

Find alle hele tal x der opfylder

$$x \equiv 3 \pmod 5 \quad \wedge \quad x \equiv 2 \pmod 7.$$

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.
