# Eksamen i Diskret Matematik

2. semester, Aalborg Universitet

Mandag den 15. august 2011, kl. 9.00–13.00.

---

**Tilladte hjælpemidler:** Bøger, noter og lignende.
Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler.
**Bemærkninger:** Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang. Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

---

### Opgave 1 (10 %)

Lad $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Vis at $f(x)$ er $O(x^2)$.

### Opgave 2 (8 %)

Opskriv en sandhedstabel for udsagnet

$$(p \to q) \vee (\neg q \wedge r).$$

### Opgave 3 (6 %)

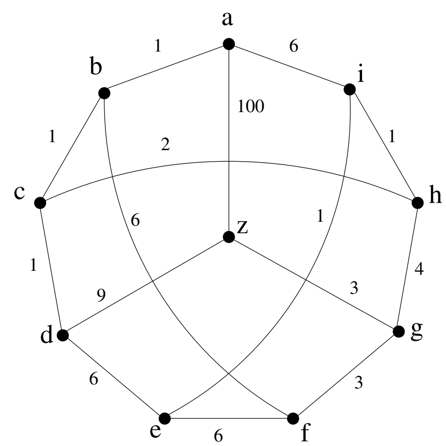
Lad $A$, $B$ og $C$ være mængder med $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|C| = 7$, og antag at $|A \cap B| = 2$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 4$ og $|A \cap B \cap C| = 2$. Hvor mange elementer er der i mængden $A \cup B \cup C$ ?

### Opgave 4 (9 %)

1. Bestem den største fælles divisor af 51 og 88 og bestem hele tal $s$ og $t$ så $\gcd(51, 88) = s \cdot 51 + t \cdot 88$.
2. Angiv en invers til 51 modulo 88 eller forklar hvorfor en sådan invers ikke eksisterer.

### Opgave 5 (8 %)

1. Bestem $5^{11} \mod 11$.
2. Bestem $4 \cdot 5^{11} + 3 \mod 11$.




Figur 1. Benyttes i opgave 7 og opgave 8.

## **Opgave 6** (20 %)

En talfølge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_0 = 2$
- $a_n = 2a_{n-1} - 1$, for $n \geq 1$.

1. Bestem værdien af $a_1$ og $a_2$.
2. Vis at $a_n = 2^n + 1$ for alle $n \geq 0$.

## **Opgave 7** (12 %)

På figur 1 ses en graf med 10 punkter, **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, **z**. Grafens kanter har vægte som angivet på figuren.

1. Bestem ved hjælp af Dijkstras algoritme længden af en korteste vej fra **a** til **z**.
2. Opskriv grafens punkter i rækkefølge bestemt voksende afstand fra **a**.

## **Opgave 8** (9 %)

Bestem et minimum vægt udspændende træ for grafen i figur 1. Angiv hvilken algoritme der benyttes, og angiv den rækkefølge hvori algoritmen tilføjer kanterne til træet.

## **Opgave 9** (18 %)

Betragt følgende algoritme:

**Procedure** talfølge( $n$: positivt helt tal)
$x := 1$
$y := 0$
$i := 1$
**while** $i < n$
**begin**
  $z := 2x - y$
  $y := x$
  $x := z$
  $i := i + 1$
**end**

1. Vis at følgende udsagn er en invariant for while-løkken

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = i \ \wedge \ y = i - 1.$$

2. Hvad er værdien af $x$ når algoritmen standser. Begrund dit svar.

---

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.