

Undergrupper og sideklasser

Lad (G, \circ) være en gruppe med neutralt element e og lad $H \subseteq G$ være en ikke-tom delmængde.

Definition Hvis (\circ) er en komposition på H og (H, \circ) er en gruppe så siger vi at H er en **undergruppe** af G .

Sætning (H, \circ) er en undergruppe af G hvis og kun hvis

1. $e \in H$,

2. $x^{-1} \in H$ for ethvert $x \in H$,

3. $x \circ y \in H$ for alle $x, y \in H$

3. betyder at \circ er en komposition på H . Kompositionen er associativ i hele G og dermed i H . 1. og 2. svarer til de to andre krav i definitionen af en gruppe.

Beviset for “kun hvis” delen af sætningen skal gøre rede for at hvis (H, \circ) er en gruppe med neutralt element e' så er $e' = e$. Og at hvis $x \in H$ har invers y i (G, \circ) og invers z i (H, \circ) så er $y = z$.

Proposition Lad H være en undergruppe af $(\mathbb{Z}, +)$.

Så findes der et entydigt tal $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$, som opfylder at

$$H = d\mathbb{Z} = \{dn \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Omvendt er $d\mathbb{Z}$ en undergruppe af \mathbb{Z} for ethvert $d \in \mathbb{Z}$.

F.eks.:

$$0\mathbb{Z} = \{0\}$$

$$1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$2\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

⋮

Definition.

Lad H være en undergruppe af G .

Mængden $gH = \{gh \mid h \in H\}$ kaldes en (venstre-) **sideklasse** af H .

Mængden $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ kaldes en højre- **sideklasse** af H .

Eksempel: Undergruppen $d\mathbb{Z}$ af $(\mathbb{Z}, +)$ har sideklasser:

$$a + d\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} + a,$$

altså restklasserne som vi tidligere har set på.

Lad H være en undergruppe af G .

De forskellige venstre-sideklasser af H udgør en partition af G .
 $xH = yH$ hvis og kun hvis $x^{-1}y \in H$.

De forskellige højre-sideklasser af H udgør en partition af G .
 $Hx = Hy$ hvis og kun hvis $xy^{-1} \in H$.

Enhver sideklasse af H har samme kardinalitet som H .

Lagrange: Hvis H er en endelig undergruppe af G så er

$$|G| = [G : H]|H|,$$

hvor $[G : H]$ betegner antallet af forskellige venstre-sideklasser af H i G , som også kaldes H 's **index** i G .

Ordenen af H går altså op i ordenen af G .