Normale undergrupper, kvotientgrupper og multiplikativ gruppe af restklasser.

Lad G være en gruppe og lad N være en undergruppe af G.
N siges at være en **normal** undergruppe af G hvis

$$gNg^{-1} = N,$$

for alle $g \in G$, hvor $gNg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in N\}$.

Hvis N er en normal undergruppe af G så kan man definere en komposition på mængden G/N af (venstre-) sideklasser af N ved

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

G/N er en gruppe, kaldet kvotientgruppen G modulo N,
med neutralt element eN og
aN har invers $a^{-1}N$.

Lad n være et positivt helt tal.
På mængden af restklasser $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ er multiplikation en veldefineret komposition:

$$[a] \cdot [b] = [ab].$$

Denne komposition er associativ, kommutativ og har invers [1].

$[a]$ har en multiplikativ invers i $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
hvis og kun hvis
$\gcd(a, n) = 1$

Vi indfører notation for mængden af invertible elemnter

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[a] \mid \gcd(a, n) = 1\}.$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ er en multiplikativ gruppe.