Cykliske grupper og (direkte) produkt af grupper.

Proposition. Lad G være en cyklisk gruppe.

- Så er enhver undergruppe af G cyklisk.

Antag at G er endelig og d være et tal, der går op i $|G|$.

- Så har G en entydig undergruppe H af orden d.

- G har $\varphi(d)$ elementer af orden d. H består af alle elementer hvis orden går op i d.

Korollar. For ethvert positivt helt tal er

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Eksempel. Lad p og q være primtal. Så er

- $1 = \sum_{d|1} \varphi(d) = \varphi(1)$,
- $p = \varphi(1) + \varphi(p)$, altså $\varphi(p) = p - 1$, og
- $pq = \varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(pq)$, altså $\varphi(pq) = pq - 1 - (p - 1) - (q - 1) = (p - 1)(q - 1)$.

Lad $G_1, \ldots, G_n$ være grupper.

Lad $G = G_1 \times \ldots \times G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) \mid g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n\}$.
Så er G en gruppe med komposition

$$(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n) = (g_1 h_1, \ldots, g_n h_n).$$

G kaldes produkt gruppen eller det direkte produkt af $G_1, \ldots, G_n$.

Lemma. Lad G være en gruppe og M og N være normale undergrupper af G med $M \cap N = \{e\}$.
Så er $MN = \{mn \mid m \in M, n \in N\}$ en undergruppe af G
og MN er isomorf med det direkte produkt $M \times N$.

Proposition 2.8.2. Lad n_1 og n_2 være positive hele tal med $\gcd(n_1, n_2) = 1$ og lad $n = n_1 n_2$.
Så er $\tilde{\phi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$
som er givet ved $\tilde{\phi}([a]_n) = ([a]_{n_1}, [a]_{n_2})$
en isomorfi.

Eksistensen af $\tilde{\phi}^{-1}$ (og metoden til beregning af denne) kaldes den kinesiske restsætning.