

Permutationer, symmetrisk gruppe og cykler.

En permutation af $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ er en bijektiv funktion $\sigma : \{1, 2, 3, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Notation: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Komposition (funktionssammensætning):

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

Husk: produktet læses fra højre mod venstre.

Mængden af alle permutation af $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ betegnes S_n .

(S_n, \circ) er en gruppe af orden $n!$. Den kaldes den symmetriske gruppe.

For $\sigma \in S_n$ sættes $M_\sigma = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$.

Permutationer σ og τ siges at være disjunkte hvis $M_\sigma \cap M_\tau = \emptyset$ og da er $\sigma\tau = \tau\sigma$.

En permutation $\sigma \in S_n$ siges at være en cykel af længde k og skrives $\sigma = (x_1 x_2 x_3 \dots x_k)$ hvis

$$\sigma(x) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{hvis } x = x_i \in \{x_1, \dots, x_{k-1}\} \\ x_1 & \text{hvis } x = x_k \\ x & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvis $\sigma = (x_1 x_2 x_3 \dots x_k)$ så er $M_\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Cyklerne $\sigma = (x_1 x_2 x_3 \dots x_k)$ og $\tau = (y_1 y_2 y_3 \dots y_\ell)$ er altså disjunkte hvis $\{x_1, \dots, x_k\} \cap \{y_1, \dots, y_\ell\} = \emptyset$.

Disjunkte cykler kommuterer.

Proposition. Enhver permutation kan skrives som produkt af disjunkte cykler.

Proposition. Hvis $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r$ er et produkt af disjunkte cykler hvor σ_i er en cykel af længde k_i så er

$$\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(k_1, k_2, \dots, k_r),$$

hvor lcm er mindste fælles multiplum.

En cykel $(x_1 x_2)$ af længde 2 kaldes en transposition.

En transposition på formen $(x x + 1)$ kaldes en simpel transposition.

For en permutation $\sigma \in S_n$ defineres mængden af inversioner

$$I_\sigma = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ og } \sigma(i) > \sigma(j)\},$$

og $n(\sigma) = |I_\sigma|$.

Proposition. Enhver permutation er produkt af simple transpositioner.

$n(\sigma)$ er det mindste antal faktorer når σ skrives som produkt af simple transpositioner.

Proposition. For $\sigma, (i \ i + 1) \in S_n$ er

$$n(\sigma \circ (i \ i + 1)) = \begin{cases} n(\sigma) + 1 & \text{hvis } \sigma(i) < \sigma(i + 1), \\ n(\sigma) - 1 & \text{hvis } \sigma(i) > \sigma(i + 1). \end{cases}$$